MULŢIMEA $\mathbb{R}$ A NUMERELOR REALE

Abstract. Această lecţie din ciclul pentru liceu pune accentul pe o mai bună înţelegere a numerelor reale şi a proprietăţilor lor.

Lecţia se adresează claselor X, XI, XII.
Data: 4 octombrie 2010.
Autor: Dan Schwarz.

1. Introducere şi Notaţii

Suntem deja cu toţii familiari cu mulţimea numerelor întregi ne-negative $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$, mulţimea tuturor numerelor întregi (cu semn) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$, şi mulţimea numerelor raţionale, mai ales în reprezentarea prin fracţii $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Numerele reale iraţionale, altele decât cele menţionate mai sus, au fost fundamentate în mod riguros de abia târziu, prin metode analitice (Cauchy sau Cantor) sau algebrice (Dedekind), când s-a completat corpul de cunoştinţe asupra mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

2. Sisteme de Numere

2.1. **Numerele Întregi.** Numerele întregi pozitive "numără" obiecte, iar zero şi cele negative sunt esenţiale pentru operaţii cu ele. Caracteristica lor esenţială este că fiecare întreg n are unul şi exact un succesor $n + 1$, ceea ce permite procedeul inducţiei matematică. Privite prin reprezentarea lor pe o dreaptă pe care s-a fixat o origine O, ele apar ca puncte izolate, discret, la distanţe de pas egal 1.

2.2. **Numerele Raţionale (Fracţii).** Numerele raţionale apar, la grecii antici, mai ales în legătură cu construcţiile geometrice, proporţii, rapoarte, etc., ca lungimi de segmente. Dat fiind un segment de lungime 1 (cu un capăt în origine), se poate uşor, doar cu rigla şi compasul,[1] construi un segment de lungime $\frac{1}{q}$, pentru orice numitor (întreg) pozitiv q, şi apoi dubla, tripla, etc., la un segment de lungime $\frac{p}{q}$, pentru orice numărător (întreg) pozitiv p.

Privite pe dreapta cu originea O, numerele raţionale nu se mai discern însă ca puncte izolate, căci pentru un raţional r nu mai există un succesor! Într-adevăr, oricare ar fi un raţional $r' > r$, între r şi r' se află $\frac{r+r'}{2}$; mai general, orice valoare $\frac{pr+qr'}{p+q}$, cu p, q întregi pozitivi. S-ar părea, la prima vedere, că raţionalele ocupă toate punctele dreptei, ceea ce ar însemna că orice două segmente sunt de lungimi comensurabile, adică dacă lungimile

[1] Din păcate, şcoala noastră a cam renunţat la instruirea elevilor în arcanele acestui subiect fascinant şi extrem de educativ.

lor sunt ℓ_1 şi ℓ_2, va exista un segment de o anume lungime ℓ, astfel încât ℓ_1 şi ℓ_2 să fie multipli întregi ai lungimii ℓ.

Un elev al lui Pitagora a făcut însă descoperirea că diagonala unui pătrat unitate (de latură 1) este incomensurabilă cu latura, deşi evident poate fi construită, deci segmentul există pe dreaptă, iar capătul lui (diferit de origine) ocupă un punct al dreptei. Demonstraţia care urmează este din [1], liber disponibilă în format .pdf la [2]. Este remarcabil că demonstraţia nu foloseşte argumente de divizibilitate (proprietăţile determinate de Euclid ale numerelor prime), ci are o aromă combinatorică.

Teorema 1. *Diagonala d a unui pătrat unitate nu este un număr raţional.*

Demonstraţie. *Fie $d = \frac{p}{q}$ (p, q întregi pozitivi), cu q minimal. Conform cu teorema lui Pitagora avem $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, deci $1 < d < 2$, dar atunci $q < p < 2q$, astfel încât*

$$\frac{2pq}{pq} = 2, \ \frac{p^2}{q^2} = 2, \ \text{şi} \ \frac{2pq - p^2}{pq - q^2} = 2 = \frac{p(2q - p)}{q(p - q)}.$$

Astfel $d = \frac{2q-p}{p-q}$. Dar $p < 2q$ şi $p - q < q$; deci avem o reprezentare raţională a lui d cu numitorul mai mic decât cel minimal! Putem inventa un simbol pentru a numi acest număr, anume $d = \sqrt{2}$. ■

Tot la grecii antici, una dintre cele trei faimoase probleme nerezolvate ale antichităţii a fost dublarea cubului. Care este lungimea laturii ℓ a unui cub de volum 2, dublul volumului cubului unitate? Ecuaţia este $\ell^3 = 2$, şi putem inventa simbolul $\ell = \sqrt[3]{2}$, dar până în vremurile moderne (Gauss) nu s-a ştiut că un segment având această lungime nu poate fi construit numai cu rigla şi compasul.

Toate acestea arată că, printre punctele reprezentând numere raţionale, se află şi alte puncte, reprezentând numere iraţionale, care toate împreună formează continuumul dreptei (reale).

3. Numerele Reale

3.1. **Axioma Marginii Superioare.** Extinzând reprezentarea zecimală a numerelor raţionale, veţi învăţa (sau aţi învăţat deja) o metodă de a vă putea reprezenta numerele reale iraţionale ca având o parte zecimală infinită neperiodică. Din păcate această metodă nu este cea mai potrivită pentru a pune în lumină proprietatea fundamentală a numerelor reale, cea de care depinde întreg eşafodajul analizei matematice, şi chiar definirea corectă a funcţiilor putere, exponenţială şi logaritm.

Axioma 1. Orice mulţime nevidă, mărginită superior A de numere reale, are o margine superioară.

Pentru a înţelege acest enunţ avem nevoie de câteva definiţii simple.

Definiţia 1. O mulţime nevidă A de numere reale se numeşte mărginită superior dacă există un număr real M, numit majorant al lui A, astfel încât $a \leq M$ pentru orice $a \in A$.

Definiţia 2. Un majorant M se numeşte margine superioară a mulţimii A, dacă fiind dat oricare alt majorant M' al lui A, avem $M \leq M'$.

Odată stabilită existenţa unei margini superioare M pentru o mulţime A, unicitatea rezultă imediat, căci dacă ar exista o alta, fie ea M', conform cu definiţia de mai sus am avea simultan $M \leq M'$ şi $M' \leq M$, deci $M = M'$. Acest fapt ne permite de a putea introduce simbolul $\sup A$ (supremum) pentru această unică margine superioară a lui A.

Evident, definiţiile pot fi întoarse pentru a defini conceptele de mărginire inferioară, minorant şi margine inferioară $\inf A$ (infimum), iar toate rezultatele se transpun imediat, considerând mulţimea $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

Pentru a înţelege impactul acestor concepte, să considerăm mulţimea de numere raţionale $R = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$. Evident R este nevidă ($0 \in R$), şi evident este mărginită superior ($r < 2$ pentru orice $r \in R$), deci are o margine superioară $\sup A$. Dar $\sup R$ nu este un număr raţional. Nu este suficient să argumentăm că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. După parcurgerea completă a lecţiei, reveniţi şi argumentaţi în mod definitiv asupra adevărului acestei afirmaţii.

Aplicaţia care pune în evidenţă în modul cel mai pregnant forţa acestei Axiome este surprinzătoarea teoremă a lui Knaster.

Teorema 2. *Fie $a \leq b$ reale. Orice funcţie crescătoare $f : [a, b] \to [a, b]$ are punct fix, adică există un punct $p \in [a, b]$ astfel încât $f(p) = p$.*

Demonstraţie. *Fie $A = \{x \in [a, b] \mid x \leq f(x)\} \subseteq [a, b]$. Desigur $a \in A$, deci A este nevidă şi mărginită superior (b este un majorant al lui A).*

Să luăm $p = \sup A$, deci $p \in [a, b]$. Pentru orice $x \in A$ avem $x \leq p$, deci $x \leq f(x) \leq f(p)$, deoarece f este crescătoare. Atunci $p = \sup A \leq f(p)$, căci $f(p)$ este un majorant al lui A, deci $p \in A$.

Dar atunci $f(p) \leq f(f(p))$, deci $f(p) \in A$, şi deci $f(p) \leq \sup A = p$. Împreună, cele două inegalităţi ne dau $f(p) = p$. ■

3.2. Axioma lui Cantor.

Axioma 2. Fiind dat un şir de intervale închise imbricate $(I_n)_{n\geq 1}$, adică $I_{n+1} \subseteq I_n$ pentru orice $n \geq 1$, intersecţia lor este nevidă $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Vom arăta că, admiţând Axioma Marginii Superioare, Axioma lui Cantor devine o teoremă.

Demonstraţie. *Fie intervalele date de $I_n = [a_n, b_n]$. Condiţia de imbricare ne dă $a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n$ pentru orice $n \geq 1$. Fie $A = \{a_n \mid n \geq 1\}$ şi $B = \{b_n \mid n \geq 1\}$. Mulţimea A este nevidă şi mărginită superior (orice b_n este un majorant), iar mulţimea B este nevidă şi mărginită inferior (orice*

a_n este un minorant). Atunci există $a = \sup A$ şi $b = \inf B$, dar vom avea $a \leq b$ direct din definiţii, căci $a \leq b_n$ pentru orice $n \geq 1$, a fiind $\sup A$, iar b_n fiind un majorant pentru A, şi atunci a este un minorant pentru B, deci $a \leq \inf B = b$. Dar atunci şi $I = [a, b] \subseteq I_n$ pentru orice $n \geq 1$, deci chiar $\emptyset \neq I = \bigcap_{n\geq 1} I_n$ (detaliile pentru egalitate, tot direct din definiţii). ■

Ca o consecinţă, dacă lungimile intervalelor devin oricât de mici, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n \geq 1$ cu $b_n - a_n < \varepsilon$, atunci $a = b$ şi intersecţia intervalelor este un unic punct, căci $0 \leq b - a < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Ce se întâmplă dacă considerăm intervale deschise $I_n = (a_n, b_n)$? La prima vedere s-ar părea că totul merge la fel, de exemplu pentru intervalele $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ avem intersecţia lor egală cu $\{0\}$. Contraexemplul $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ne arată însă că în acest caz intersecţia este vidă! Acest fenomen se datorează faptului că aici $0 = \sup A \in A$, şi nu mai putem trage concluzia decât pentru intervalul (a, b), care este vid.

La fel, utilizând una sau alta din axiomele de mai sus, se poate demonstra că orice şir Cauchy (sau fundamental) este convergent, dar despre aceasta în altă lecţie.

3.3. **Axioma lui Arhimede.** Cine se îndoieşte de adevărul următoarei afirmaţii?

Axioma 3. Pentru orice număr real x, există un întreg n astfel încât $x < n$.

Şi atunci de ce îi spunem axiomă? De fapt acest enunţ poate fi demonstrat folosind Axioma Marginii Superioare de mai sus. Există însă tot atâtea axiome pentru numerele reale câte metode de a le construi (Axioma Cantor, Axioma Cantor-Dedekind, Axioma Cauchy, ...), şi nu este scopul nostru de a clarifica axiomatica şi fundamentele construcţiei numerelor reale în profunzime (am atins doar marginal aceste idei în secţiunea precedentă).

Importanţa acestui enunţ se reflectă în utilizarea lui (uneori inconştientă) în raţionamentele noastre matematice. De exemplu

Problema 1. Fiind date două numere reale $0 < a < b$, arătaţi că există un număr raţional $a < r < b$, situat strict între ele.

Soluţie. Conform cu cele de mai sus, există $n > x = \max\left(\frac{2}{b-a}, \frac{1}{a}\right)$, deci $\frac{1}{n} < \min\left(\frac{b-a}{2}, a\right)$, şi există $a < N = \frac{Nn}{n}$. Dar atunci există un cel mai mare întreg pozitiv m ($1 \leq m < Nn$) astfel încât $\frac{m}{n} \leq a$, deci $\frac{m+1}{n} > a$ şi $\frac{m+1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b$, şi am găsit $r = \frac{m+1}{n}$. □

Desigur, cu un minim efort putem extinde acest rezultat pentru orice două numere reale $a < b$. Lăsăm ca exerciţiu enunţul simetric, care cere să se arate că, fiind date două numere reale $a < b$, există un număr iraţional $a < x < b$, situat strict între ele.

Definiţia 3. O mulţime A se numeşte densă în mulţimea B dacă pentru orice elemente $b_1 < b_2$ din B există un element a din A situat strict între ele $b_1 < a < b_2$.

Ceea ce am demonstrat mai sus se poate acum enunţa ca

Teorema 3. *Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este densă în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.*

3.4. **Concepte Avansate.** Putem deci asocia oricărui număr real $x \in \mathbb{R}$ mulţimea de numere raţionale $R_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$. Este clar atunci că $x = \sup R_x$. Fie acum o mulţime mărginită superior A de numere reale $a \leq M$ pentru orice $a \in A$. Fie

$$R = \bigcup_{a \in A} R_a.$$

Pentru orice $r \in R$ va exista deci $a \in A$ astfel încât $r \in R_a$ (din definiţia reuniunii). Dar atunci $r \leq a \leq M$, deci mulţimea R este mărginită superior. Cine credeţi că este $\sup R$? Nu este greu de văzut că $\sup R = \sup A$. Exact această observaţie a permis lui Dedekind să inverseze procesul, şi să definească numerele reale ca mulţimi de numere raţionale, mărginite superior. În felul acesta Axioma Marginii Superioare devine şi ea o teoremă, demonstrabilă ca mai sus.[2]

4. Încheiere

Vom reveni în lecţii ulterioare cu aplicarea metodelor prezentate aici, la definirea de funcţii reale şi analiza şirurilor (probleme de convergenţă, continuitate, etc.)

References

[1] Moser, Leo, *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Trillia Group, (2004).
[2] The Trillia Group, `http://www.trillia.com/moser-number.html`

[2]Aceasta este esenţa metodei Tăieturilor lui Dedekind. Desigur amănuntele tehnice sunt mult mai numeroase şi precauţiile de luat pentru a asigura o definire corectă, exhaustivă şi necontradictorie trebuie lăsate pentru studii mai avansate.