XI International Zhautykov Olympiad in Sciences
Almaty – Kazakhstan, January 11-17, 2015
Presentation of the Mathematics Section by Dan Schwarz

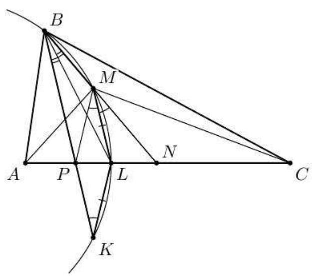
First Day (January 13, 2015) – Problems

Problem 1. Each point with integral coordinates in the plane is coloured white or blue. Prove that one can choose a colour so that for every positive integer n there exists a triangle of area n with three having its vertices of the chosen colour.

A. Golovanov

Problem 2. Inside the triangle ABC a point M is given. The line BM meets the side AC at N. The point K is symmetrical to M with respect to AC. The line BK meets AC at P. If $\angle AMP = \angle CMN$, prove that $\angle ABP = \angle CBN$.

N. Sedrakyan



Problem 3. Determine all the functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

(Uzbekistan) Sh. Ismailov

Prezentarea problemelor din cadrul secţiunii matematice a concursului Zhautykov din acest an este făcută şi popularizată cu scopul de a vedea încă un alt concurs internaţional, pentru a putea cântări dificultatea probelor, în comparaţie cu propriile noastre concursuri, de selecţie sau de palmares. Deoarece concursul este internaţional, am preferat a face prezentarea în limba engleză, dar comentariile vor fi făcute în limba română. Enunţurile prezentate pe primele două pagini sunt urmate de soluţii detaliate şi comentarii. Informaţii complete (printre care, la timpul cuvenit, şi rezultatele) la http://izho.kz/ .

Second Day (January 14, 2015) – Problems

Problem 4. Determine the maximum integer n with the property that for each positive integer $k \leq \frac{n}{2}$ there exist two positive divisors of n with difference k.

A. GOLOVANOV

Problem 5. Let A_n be the set of partitions of the sequence $(1, 2, \ldots, n)$ into several subsequences such that every two neighbouring terms of each subsequence have different parity, and let B_n be the set of partitions of the sequence $(1, 2, \ldots, n)$ into several subsequences such that all the terms of each subsequence have the same parity.[1]

Prove that for every positive integer n the sets A_n and B_{n+1} contain the same number of elements.

D. ELIUSIZOV

Problem 6. The area of a convex pentagon $ABCDE$ is S, and the circumradii of the triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB are R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Prove the inequality

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geq \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$

N. SEDRAKYAN

< spoiler > Soluţii detaliate şi comentarii vin pe paginile următoare. Încercaţi să rezolvaţi problemele înainte de a merge mai departe.

[1]For example, the partition $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ is an element of A_9, and the partition $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ is an element of B_6.

First Day – Solutions

Problem 1. Each point with integral coordinates in the plane is coloured white or blue. Prove that one can choose a colour so that for every positive integer n there exists a triangle of area n having its vertices of the chosen colour.

Solution. If there exists some c-monochromatic horizontal row $y = k$, then if both rows $y = k - 1$ and $y = k + 1$ are $\overline{c}$-monochromatic we can find $\overline{c}$-monochromatic triangles of any positive integer area, otherwise they must contain at least a c-point, and we can find c-monochromatic triangles of any positive integer area. So assume there exists no monochromatic horizontal row. Consider the horizontal row $y = 0$. If it contains two c-points at distance 1, then for any positive integer n, together with a c-point on row $y = 2n$ they will make a c-monochromatic triangle of area n. Otherwise it will contain two $\overline{c}$-points at distance 2, which for any positive integer n, together with a $\overline{c}$-point on row $y = n$ will make a $\overline{c}$-monochromatic triangle of area n. ■

Comentarii. Extrem de puţin din întreaga diversitate de colorări este utilizat, ceea ce face problema oarecum trivială ... De remarcat că nu este adevărat că se pot întotdeauna obţine triunghiuri monocromatice de orice arie $n/2$; de exemplu pentru colorarea ”în tablă de şah” nu se vor obţine triunghiuri monocromatice de arie $1/2$. Iar dacă mărim numărul de culori la trei, există o (simplă) colorare fără triunghiuri monocromatice de arie 1. Presupun că întrebări mult mai interesante şi dificile pot fi imaginate ...

Problem 2. Inside the triangle ABC a point M is given. The line BM meets the side AC at N. The point K is symmetrical to M with respect to AC. The line BK meets AC at P. If $\angle AMP = \angle CMN$, prove that $\angle ABP = \angle CBN$.

Solution. (AoPS – user TelvCohl) Let M^* be the isogonal conjugate of M with respect to $\triangle ABC$.

Lemma. Let ℓ be the isogonal conjugate of AM with respect to $\angle BMC$, and let ℓ^* be the isogonal conjugate of AM^* with respect to $\angle BM^*C$. The lines ℓ, ℓ^* meet on BC and are symmetrical with respect to BC.

Proof. Let X be the meeting point of BM^* and CM. Let $Y \in BC$ be a point such that XA, XY are isogonal conjugate with respect to $\angle BXC$.

Since CA, CY are isogonal conjugate with respect to $\angle M^*CM$, so A and Y are isogonal conjugate with respect to $\triangle CXM^*$, it follows that M^*Y, M^*A are isogonal conjugate with respect to $\angle BM^*C$. Similarly, we can prove MY, MA are isogonal conjugate with respect to $\angle BMC$.

By easy angle chasing we get $\angle MYB = \angle CYM^*$, thus $MY \equiv \ell$ and $M^*Y \equiv \ell^*$ are symmetrical with respect to BC. □

From the LEMMA we now get that PK is the isogonal conjugate of BM^* with respect to $\angle AM^*C$, thus from $B \in PK$ we get PK to be the angle bisector of $\angle AM^*C$ and $M^* \in BK$, therefore $\boxed{\angle ABP = \angle CBN}$. ■

Alternative Solution. (Ştefan Tudose on AoPS) Notice that the thesis is equivalent (by Steiner's theorem) with $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{MC}{MA}$; stated in other words, that B lies on the M-Apollonius circle of $\triangle MCA$.

Let F be the foot of the angle bisector of $\angle CMA$. By dint of the above observation, it is enough to prove that $B \in \odot(MFK)$, which is trivial by simple angle chasing; suppose wlog that $MA > MC$, it then follows $\angle MFK = \pi + \angle MAC - \angle MCA = \pi - \angle KBM$. ■

Problem 3. Determine all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. (Ştefan Tudose on AoPS) Let $P(x, y)$ be the assertion that $f(x^3+y^3+xy) = x^2 f(x)+y^2 f(y)+f(xy)$. From $P(1, 0)$ we get that $f(0) = 0$, hence from $P(x, 0)$ we get $f(x^3) = x^2 f(x)$. $P(x, -x)$ yields $f(x) = -f(-x)$.

From $P(x, y) - P(x, -y)$ we get

$$f(y^3) + f(xy) = \frac{1}{2}\left(f(x^3 + y^3 + xy) + f(y^3 + xy - x^3)\right).$$

Substituting back into $P(x, y)$ we get that

$$f(x^3 + y^3 + xy) = 2f(x^3) + f(y^3 + xy - x^3) \quad (*)$$

Let a, b be real numbers, and let $x = \sqrt[3]{a}$. The polynomial $P_b(\alpha) = \alpha^3 + x\alpha - b$ has odd degree, hence at least one real root. Let y be one of the real roots. Plugging x and y in $(*)$, we get that $f(a + b) = 2f(a) + f(b - a)$ for all $a, b \in \mathbb{R}$. Taking $a = b$, we get $f(2a) = 2f(a)$, so

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

So $f(x + y) = f(x) + f(y)$ and

$$f(x^3) = x^2 f(x) \quad (**)$$

Taking $x + 1$ and $x - 1$ in $(**)$ and summing up the two relations we get that $2x^2 f(x) + 6f(x) = f(x)(2x^2 + 2) + 4xf(1)$, i.e. $\boxed{f(x) = xf(1)}$. ■

Alternative Solution. (AoPS – user pco) Under the notations of above we similarly get $f(0) = 0$, $f(x^3) = x^2 f(x)$, and $f(x)$ odd.

Let then u, v be such that $u + v \leq 0$. It's easy to see that the system $x^3 + y^3 + xy = u$, $-x^3 - y^3 + xy = v$ always has a solution, and then

$P(x, y)$ yields $f(u) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$;

$P(-x, -y)$ yields $f(v) = -x^2 f(x) - y^2 f(y) + f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$.

Just adding the two lines above gives $f\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \dfrac{f(u)+f(v)}{2}$ for all u, v such that $u + v \leq 0$. If $u + v \geq 0$, we then have $-u - v \leq 0$ and so $f\left(\dfrac{-u-v}{2}\right) = \dfrac{f(-u)+f(-v)}{2}$ and, since the function $f(x)$ is odd, we also have $f\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \dfrac{f(u)+f(v)}{2}$ for all u, v such that $u + v \geq 0$.

Then $f\left(\dfrac{2u+0}{2}\right) = \dfrac{f(2u)+f(0)}{2}$, and so $f(2u) = 2f(u)$. Therefore $f\left(\dfrac{2u+2v}{2}\right) = \dfrac{f(2u)+f(2v)}{2} = f(u) + f(v)$, i.e. $f(x)$ is additive.

Let then be $n \in \mathbb{N}$; $P(x + n, 0)$ yields $f((x + n)^3) = (x + n)^2 f(x + n)$, whence $n(2f(x) - 2xf(1)) = -3f(x^2) + 2xf(x) + x^2 f(1)$ for all $n \in \mathbb{N}$. So $f(x) = xf(1)$ for all x, and so $\boxed{f(x) = ax}$ for all x, which indeed is a solution, whatever $a \in \mathbb{R}$. ■

Second Day – Solutions

Problem 4. Determine the maximum integer n with the property that for each positive integer $k \leq \dfrac{n}{2}$ there exist two positive divisors of n with difference k.

Solution. If there exists a positive integer $p \leq \lfloor n/6 \rfloor$ such that $p \nmid n$, then we have $\lfloor n/2 \rfloor > \lfloor n/6 \rfloor$, and taking $k = \lfloor n/2 \rfloor - p \geq 2$ and two positive divisors $d, d + k$ of n, we need $d + (\lfloor n/2 \rfloor - p)$ to divide n. But $d + (\lfloor n/2 \rfloor - p) \geq d + \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/6 \rfloor > d + (n/2 - 1) - n/6 \geq n/3$, so $d + (\lfloor n/2 \rfloor - p) \in \{n/2, n\}$, the only possible divisors of n larger than $n/3$. However, $d + (\lfloor n/2 \rfloor - p) = n/2$ yields $d = p$, absurd (since $d \mid n$ but $p \nmid n$), while $d + (\lfloor n/2 \rfloor - p) = n$ yields $d > n/2$, thus $d = n$ (since $d \mid n$), forcing $p = \lfloor n/2 \rfloor > \lfloor n/6 \rfloor$, again absurd. Therefore all positive integers not larger than $\lfloor n/6 \rfloor$ must divide n.

Denote $u = \lfloor n/6 \rfloor$. Since $\gcd(u, u - 1) = 1$, it follows $u(u - 1) \mid n$, so $u(u - 1) \leq n = 6(n/6) < 6(u + 1)$, forcing $u \leq 7$. For $u \geq 4$ we need $\operatorname{lcm}[1, 2, 3, 4] = 12 \mid n$, and we can see that $n = 24$ satisfies, and moreover is an acceptable value. For $n = 36$ we get $u = 6$, but $\operatorname{lcm}[1, 2, 3, 4, 5, 6] = 60 \nmid n$. And for $n \geq 48$ we have $u \geq 8$, not acceptable. Thus the answer is $\boxed{n = 24}$.

We may in fact quite easily exhibit the full set $\{1, 2, 4, 6, 8, 12, 18, 24\}$ of such positive integers n (for $n = 1$ the condition is vacuously fulfilled). The related question of which are the positive integers satisfying the above property for all $1 \leq k \leq n - 1$ can also easily be answered; the full set is $\{1, 2, 4, 6\}$. ■

Comentarii. O problemă extrem de drăguţă, şi nu tocmai simplă dacă ne străduim să evităm discutarea a prea multe cazuri. Analiza numerelor n mici ne sugerează imediat că $n > 1$ nu poate să fie impar (ceea ce este trivial), şi prin faptul că singurul k defect pentru $n = 36$ este $k = 13$, ideea pentru soluţia dată mai sus. Oricum, o idee proaspătă, şi care se implementează elegant şi cu calcule minime.

Problem 5. Let A_n be the set of partitions of the sequence $(1, 2, \ldots, n)$ into several subsequences such that every two neighbouring terms of each subsequence have different parity, and let B_n be the set of partitions of the sequence $(1, 2, \ldots, n)$ into several subsequences such that all the terms of each subsequence have the same parity.[2]

Prove that for every positive integer n the sets A_n and B_{n+1} contain the same number of elements.

Solution. For each partition π of $\{1, 2, \ldots, n\}$, with the elements within each block written in ascending order, denote by $k(\pi)$ the number of blocks of π ending in an even number and by $\ell(\pi)$ the number of blocks of π ending in an odd number.

Also denote $f_n(x, y) = \sum\limits_{\pi \in A_n} x^{k(\pi)} y^{\ell(\pi)}$ and $g_n(x, y) = \sum\limits_{\pi \in B_n} x^{k(\pi)} y^{\ell(\pi)}$.

We will have $|A_n| = f_n(1, 1)$.

For example

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= y \\
f_2(x, y) &= x(y + 1) \\
f_3(x, y) &= y(xy + y + x + 1) \\
f_4(x, y) &= x(xy^2 + y^2 + 3xy + 3y + x + 1)
\end{aligned}$$

A moment of reflection will show us that

$$f_{n+1}(x, y) = y \left(f_n(x, y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x, y) \right) \text{ for even } n,$$

$$f_{n+1}(x, y) = x \left(f_n(x, y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_n(x, y) \right) \text{ for odd } n.$$

This comes from considering where the element $n+1$ may go, and how this affects the number of blocks.

We will also have $|B_n| = g_n(1, 1)$.[3]

[2]For example, the partition $\{(1, 4, 5, 8), (2, 3), (6, 9), (7)\}$ is an element of A_9, and the partition $\{(1, 3, 5), (2, 4), (6)\}$ is an element of B_6.

[3]The sequence $(|B_n|)_{n \geq 0}$ that starts $1, 1, 1, 2, 4, 10, 25, 75, 225, \ldots$ is sequence A124419 from Sloane's Encyclopædia of Integer Sequences https://oeis.org/ listing the number of partitions of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ having no blocks that contain both odd and even entries. No "elementary" closed form is available, but the general term can be expressed in terms of Bell numbers, since it's $|B_n| = \beta_{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \beta_{\lceil n/2 \rceil}$ (I used β instead of the usual B in order to avoid any confusion of notations; maybe that's why the notation B_n was chosen in first place, ha ha).

For example

$$\begin{aligned}
g_1(x,y) &= y\\
g_2(x,y) &= xy\\
g_3(x,y) &= yx(y+1)\\
g_4(x,y) &= xy(xy+y+x+1)\\
g_5(x,y) &= yx(xy^2+y^2+3xy+3y+x+1)
\end{aligned}$$

Another moment of reflection will show us that

$$g_{n+1}(x,y) = y\left(g_n(x,y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g_n(x,y)\right) \text{ for even } n,$$

$$g_{n+1}(x,y) = x\left(g_n(x,y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_n(x,y)\right) \text{ for odd } n.$$

This also comes from considering where the element $n+1$ may go, and how this affects the number of blocks.

It is not hard to check that $g_{n+1}(x,y) = yf_n(x,y)$ for even n and that $g_{n+1}(x,y) = xf_n(x,y)$ for odd n. This is seen to hold true for small values of n. Henceforth, for even n, $g_{n+1}(x,y) = y\left(g_n(x,y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g_n(x,y)\right) = yxf_{n-1}(x,y) + yx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f_{n-1}(x,y)$ by induction step on $g_n(x,y) = xf_{n-1}(x,y)$, while $yf_n(x,y) = yx\left(f_{n-1}(x,y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f_{n-1}(x,y)\right)$. Alike computation holds for odd n. So $g_{n+1}(1,1) = f_n(1,1)$ in all cases, and so $\boxed{|B_{n+1}| = |A_n|}$. ■

Comentarii. De fapt o partiţie de unul din cele două tipuri poate fi privită şi ca scrierea în cicluri disjuncte a unei permutări convenabile din $\mathcal{S}_n$. Odată ce ideea (folosirea unui fel de funcţii generatoare) se iveşte, problema devine aproape trivială. Consideraţii asupra acestor partiţii din A_n, numite *parity-alternating*, sunt numeroase, relativ şi la numerele Stirling de a doua speţă $\left\{ {n \atop k} \right\}$, legate de numerele Bell β_n prin relaţia $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$; de exemplu

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379513004758

Problem 6. The area of a convex pentagon $ABCDE$ is S, and the circumradii of the triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB are R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Prove the inequality

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geq \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$

Comentarii. De ce oare s-a preferat 108°, şi nu $3\pi/5$? sau $2\pi/5$? ca să vedem şi noi mai bine legătura cu pentagonul ... căci relaţia este evident o egalitate pentru cazul unui pentagon regulat. Nu mă prea interesează soluţia, probabil bazată pe anume identităţi trigonometrice, şi încununată printr-o inegalitate a mediilor, Cauchy-Schwarz, sau Jensen.

Comentarii Finale.

Au participat 36 de echipe, cu 393 de participanţi din 15 ţări (pentru trei discipline; 174 participanţi la Matematică), printre care Bielorusia, Bulgaria, India, Indonezia, Kazahstan, Mongolia, **România (C. N. Tudor Vianu)**, Rusia, Serbia, Ucraina (nu şi **Turcia**, cum anunţă site-ul liceului Vianu!?!).

Rezultatele delegaţiei din România (C. N. Tudor Vianu)

Disciplina	**Nume**	**Rezultat**	**Medalie**
Matematică	Alex Valentin Dicilea	14/42	Bronz
	Tudor Dimitrie Popescu	9/42	Bronz
	Andreea Dima	8/42	
Fizică	Monica Cristina Dobrinoiu	16,9/40	Bronz
	Ioan Budea	13,5/40	
Informatică	Teodor Stelian Ionescu	263/600	Argint
	Paul Andrei Gramatovici	228/600	Bronz

Echipa s-a clasat pe locul 11/36, cu Menţiune (mulţumită rezultatelor de la Fizică şi mai ales Informatică – rezultatele de la Matematică au fost destul de slabe).

Marele Premiu a fost luat de o echipă din **Kazahstan**. Punctajul maxim realizat la Matematică a fost **35/42**. Nici problemele, şi cu atât mai puţin soluţiile oficiale, nu au fost afişate, dar liste complete de participanţi şi rezultate finale pot fi acum găsite la http://izho.kz/.

Următorul concurs internaţional este **7th Master of Mathematics 2015** găzduit chiar de C. N. Tudor Vianu! în perioada 25 februarie – 1 martie 2015; site oficial http://rmms.lbi.ro/. Să ne mai bucurăm şi că **4th EGMO 2015** este în bună stare de sănătate şi se va desfăşura în perioada 14 – 20 aprilie 2015 în capitala Minsk a Bielorusiei – site-ul oficial al competiţiei este https://www.egmo.org/egmos/egmo4/ (vezi şi anunţurile deja postate pe http://www.viitoriolimpici.ro/). Componenţa echipelor pentru aceste concursuri se decide în jurul momentului postării acestor comentarii.

Echipa de fete pentru **4$^{\text{th}}$ EGMO 2015** (Bielorusia) a fost în fine aleasă;

http://ssmr.ro/files/olimpiade/egmo/egmo-2015.pdf

Nu mă pot abţine să nu prezint un comentariu. Au fost unele "probleme" în alegerea echipei, şi unele afirmaţii făcute în diverse medii. Astfel, s-a justificat ("ficat", "ficat",...) decizia prin faptul că acest concurs ar fi un concurs de "Seniori"; vezi şi adăugarea acestui epitet la numele (de drept de **copyright**) al concursului, în chiar titlul documentului referit mai sus. Astfel de afirmaţii goale sunt periculoase, prin faptul că pot fi uşor verificate, şi dovedite a fi mincinoase. **EGMO** nu a fost niciodată dorit a se adresa unei grupe de vârstă, şi este deschis (**open**) tuturor fetelor încadrate în regim şcolar pre-universitar. De altfel, în istoria de trei ani a concursului, au participat 22 de fete la vârsta de 15 ani, 7 fete la vârsta de 14 ani (una primind medalie de aur), şi 3 fete la vârsta de 13 ani (una primind medalie de argint; printre ele, şi Ana Mustaţă din Irlanda!). Şi nu din chiar oricare ţări, ci printre ele, Turcia şi USA.

Desigur, este prerogativa decidenţilor din România să impună condiţia de seniorat (liceu), dar aceasta nu a fost astfel precizată nicăieri în trecut. Într-adevăr, în lipsa unei pregătiri speciale, cu lecţii, antrenamente şi teste specializate, ar fi incorect în primul rând faţă de tinerele fete să fie aruncate "în focul bătăliei" (concursul nu este uşor!). Până la urmă, componenţa echipei este finalmente **cea mai bună posibilă**, dar se putea ajunge acolo mai simplu, printr-o judecată de valoare bazată pe considerarea ponderată a tuturor rezultatelor lor.

În ultimul moment, am intrat atât în posesia rezultatelor, cât şi a soluţiilor "oficiale". Paginile următoare conţin comentarii suplimentare (generate de aceste soluţii), soluţia oficială la Problema 6, şi câteva statistici referitoare la rezultatele secţiunii Matematică a concursului.

Dan Schwarz, 26 ianuarie 2015

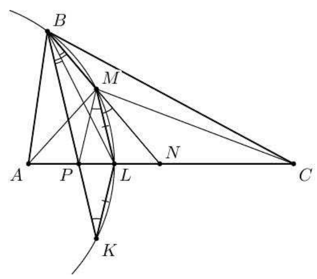
Statistici asupra punctajelor, pe probleme (numai pentru cei 72 de medaliaţi, cu scoruri între 35 şi 9 puncte).[4]

Problema/Puncte	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**Medie**
P1	49	0	2	1	1	3	5	11	5, 0
P2	38	2	0	0	0	6	9	17	4, 0
P3	9	0	3	2	1	0	12	45	1, 2
P4	44	7	5	3	2	5	6	0	5, 5
P5	12	0	1	0	1	0	5	53	1, 2
P6	0	0	0	0	0	0	0	72	0, 0
Combinat	152	9	11	6	5	14	37	198	16, 8

Problema 6 a condus la toate scorurile egale cu zero ... la ce bun astfel de probleme? Ziua a doua s-a dovedit a fi relativ mai grea decât prima. S-au acordat 12 medalii de aur (35-24 puncte), 25 medalii de argint (22-16 puncte) şi 35 medalii de bronz (15-9 puncte); în total 72 de medalii pentru 174 de participanţi, mult mai puţin decât proporţia de 50% aplicată de obicei, şi respectată întocmai la Fizică şi Informatică (iar "medal cut-offs" sunt extrem de joase faţă de cele de la OIM, probabil datorită nivelului scăzut al celor mai mulţi dintre concurenţi – comparativ cu nivelul problemelor date spre rezolvare, mai ales Problema 6).

Comentarii Suplimentare.[5]

Problema 1. Soluţia "oficială" pe care o citesc face cam acelaşi lucru, poate într-o altă ordine ...



Problema 2. Let L be the meeting point of the angle bisector of M in the triangle PMN with PN. Then the condition of the problem implies that $\angle AML = \angle CML$, therefore the points M, L, K lie on the Apollonius circle ω relative to points A and C. From the symmetry of M and K we derive that $\angle NML = \angle LMP = \angle LKP$. Then $\angle BKL + \angle BML = \angle BLK + 180° - \angle NML = 180°$, thus the quadrilateral $BMLK$ is cyclic. So the point B also lies on ω, whence $\angle ABL = \angle LBC$ and $\angle KBL = \angle LBM$, due to the fact that $KL = LM$. This yields the thesis of the problem. ■

[4]Detalii la http://matol.kz/results/269.

[5]Soluţii la http://matol.kz/olympiads/269.

Problema 3. Soluţia "oficială" recurge la manipulări asemănătoare celor din soluţiile deja prezentate.

Problema 4. Soluţia "oficială" ajunge şi ea cam la aceleaşi lucruri, mai ales la importanţa pe care o joacă pragul $\lfloor n/6 \rfloor$.

Problema 5. Cea mai simplă metodă.

To prove that $|A_n| = |B_{n+1}|$ we construct a bijection between these two sets of partitions. Let $A \in A_n$; we associate to this partition the partition $B \in B_{n+1}$ given by the following rule

> Numbers $x < y$ are adjacent in some subsequence of A if and only if x and $y+1$ are adjacent in some subsequence of B.

For example, to the partition $\{(1,4,7,8),(2,5,10),(3,6),(9)\} \in A_{10}$ we associate the partition $\{(1,5,11),(2,6),(4,8),(3,7,9),(10)\} \in B_{11}$. By this rule, it follows immediately that in every subsequence of B all numbers have the same parity, i.e. $B \in B_{n+1}$. Conversely, for each pair $x < z$ of adjacent numbers in any subsequence of some partition $B \in B_{n+1}$, the numbers x and $z-1$ (of different parity, and with obviously $x < z-1$), will belong to some subsequence of a uniquely determined partition $A \in A_n$.

O metodă mult mai directă şi rapidă decât a mea; pe care cu toate acestea tot o îndrăgesc, căci aduce mult mai multe lămuriri ...

Probabil că unul dintre cele mai simple feluri de a argumenta bijecţia este chiar folosirea permutărilor (de care vorbeam în comentariile mele). Fie $\sigma \in \mathcal{S}_n$, ale cărei cicluri sunt clasele partiţiei $A \in A_n$. Voi construi o permutare $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ astfel; $\tau(x) = \sigma(x) + 1$ dacă $\sigma(x) > x$, şi $\tau(x) =$ începutul ciclului în care se află x în τ dacă $\sigma(x) \leq x$ (în roşu mai jos).

Pentru exemplul dat de ei mai sus, din

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 3 & 8 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1,4,7,8)(2,5,10)(3,6)(9)$$

obţinem

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 & 2 & 9 & 4 & 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = (1,5,11)(2,6)(4,8)(3,7,9)(10)$$

Procedura inversă, de a construi o permutare $\sigma \in \mathcal{S}_n$ din $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$ este deci astfel; $\sigma(x) = \tau(x) - 1$ dacă $\tau(x) > x$, şi $\sigma(x) =$ începutul ciclului în care se află x în σ dacă $\tau(x) \leq x$ (în verde mai sus). De fapt, scriind deja în cicluri, după prima parte nu mai avem decât de "încheiat" ciclurile.

Un alt fel este de a vedea la început numerele din $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ drept "atomi" $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{n+1\}$, şi de a "coagula" atomi în "molecule", şi apoi molecule între ele, după reguli evidente în lumina celor de mai sus.

Problema 6. We need a couple of lemmata.

LEMMA 1. The area S of a convex n-gon $A_1A_2\dots A_n$ satisfies

$$2S \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_{i+1}\cdot R_i = \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \sin A_i,$$

where R_i is the radius of the circumcircle of $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, and the indices are reduced modulo n (thus $A_0 \equiv A_n$ and $A_{n+1} \equiv A_1$).

Proof. Let M_i be the midpoint of A_iA_{i+1}, for $1 \le i \le n$. For each i consider the quadrilateral formed by the segments A_iM_i and A_iM_{i-1}, and by the perpendiculars onto these segments at M_i and M_{i-1}, respectively.

We shall prove that these n quadrilaterals cover our n-gon. Indeed, let P be a point inside the n-gon. Let PA_k be the least of the distances PA_i, $1 \le i \le n$. Having $PA_k \le PA_{k+1}$ and $PA_k \le PA_{k-1}$ means P lies inside the n-gon and in each of the two half-planes containing A_k and limited by the perpendicular bisectors of A_kA_{k+1} and A_kA_{k-1}, thus in the k-th quadrilateral. To complete the proof, it remains to notice that the area of the i-th quadrilateral does not exceed $\dfrac{A_{i-1}A_{i+1}}{2}\cdot\dfrac{R_i}{2}$, and also that of course $\dfrac{A_{i-1}A_{i+1}}{2} = R_i \sin A_i$. □

LEMMA 2. If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ are the angles of a convex pentagon, then $\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \dots + \sin^2\alpha_5 \le 5\sin^2 108^\circ$.

Proof. Will be presented at the end. □

In the context of our problem, it follows that $2S \le \sum_{i=1}^{5} R_i^2 \sin A_i$. Using the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality and LEMMA 2 we now obtain

$$2S \le \sum_{i=1}^{5} R_i^2 \sin A_i \le \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{5} R_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{5} \sin^2 A_i\right)} \le \sqrt{5\sin^2 108^\circ \sum_{i=1}^{5} R_i^4},$$

whence $\dfrac{4S^2}{5\sin^2 108^\circ} \le \sum_{i=1}^{5} R_i^4$. ■

Exact ceea ce bănuiam. LEMA 1 este drăguţă, dar probabil folclor, iar LEMA 2 este o inegalitate auxiliară, rezolvată în soluţia "oficială" prin metode Sturmiene de "mixing variables", **axate în mod instrumental pe valoarea** $n = 5$ (ceea ce explică şi particularizarea din problemă la cazul unui pentagon). Apoi intervine un Cauchy-Schwarz ... Personal, voi utiliza metoda multiplicatorilor Lagrange pentru a obţine acest rezultat, cu valorile lui n variind între 3 şi 5, şi arăta că inegalitatea nu mai funcţionează pentru $n > 5$.

Proof of Lemma 2. We may assume $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_5 < 180^\circ$. By a well-known formula $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_5 = 540^\circ$. If $\alpha_1 = 108^\circ$, then $\alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = 108^\circ$, and the inequality becomes equality. If $\alpha_1 < 108^\circ$, then $\alpha_5 > 108^\circ$. Notice that $\alpha_1 + \alpha_5 < 270^\circ$ (if $\alpha_1 + \alpha_5 \geq 270^\circ$, then $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 270^\circ$, so $\alpha_2 \leq 90^\circ$, *a fortiori* $\alpha_1 \leq 90^\circ$, and therefore $\alpha_5 \geq 180^\circ$, a contradiction).

Therefore we arrive at $\sin^2 108^\circ + \sin^2(\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ) - \sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_5 = 2\cos(\alpha_1 + \alpha_5)\sin(\alpha_1 - 108^\circ)\sin(\alpha_5 - 108^\circ) > 0$. This means that by the replacement of α_1 with 108° and of α_5 with $\alpha_1 + \alpha_5 - 108^\circ$ we increase the sum of the squared sinuses. Repeating this operation, we will make all the angles equal to 108°, and the inequality is proved. □

Soluţia dată mai sus profită din plin de faptul că sunt implicate doar 5 unghiuri. Să vedem ce important este să posedăm metode puternice, care să soluţioneze aceste inegalităţi ”auxiliare” care pot apare în cursul rezolvării unei probleme.

Fie deci unghiurile $\alpha_k \in (0, \pi)$, $1 \leq k \leq n$, ale unui poligon convex cu n laturi. Atunci, după un bine-cunoscut fapt, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (n-2)\pi$. Ne va interesa să determinăm maximul expresiei $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\alpha_k$, şi anume dacă acest maxim este $n\sin^2 \dfrac{n-2}{n}\pi$. Din păcate funcţia $f\colon (0,\pi) \to (0,1]$ dată prin $f(x) = \sin^2 x$ nu este concavă, căci derivata sa a doua $f''(x) = 2\cos 2x$ este pozitivă pe $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$. Apelăm atunci la metoda multiplicatorilor Lagrange. Fie

$$L_{n,M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\alpha_k - \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - M\pi\right),$$

definită pe domeniul $\mathcal{D}_{n,M} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (0,\pi)^n \;\middle|\; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - M\pi\right\}$, unde (pentru a păstra pentru viitor completa generalitate) lucrăm cu un M fixat din intervalul $(0, n)$. Derivatele sale parţiale egalate cu zero sunt $\dfrac{\partial}{\partial\alpha_k} L_{n,M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \lambda) = \sin 2\alpha_k - \lambda = 0$, pentru $1 \leq k \leq n$. Scăzute în perechi, dau $\sin 2\alpha_i = \sin 2\alpha_j$, pentru toţi $1 \leq i < j \leq n$, de unde $\alpha_i = \alpha_j$ sau $\alpha_i + \alpha_j = \pi/2$ sau încă $\alpha_i + \alpha_j = 3\pi/2$.

- Dacă toţi α_k iau o singură valoare α, atunci $\alpha = \dfrac{M}{n}\pi$ şi $L_{n,M}(\cdots)$ va lua valoarea $L_{n,M} = n\sin^2 \dfrac{M}{n}\pi$; dacă nu, vom profita de faptul că pentru celelalte potenţiale puncte critice din interiorul domeniului nu ne interesează decât ca valoarea lui $L_{n,M}(\cdots)$ acolo să fie mai mică sau egală cu $L_{n,M}$ (ceea ce ar promova acesta ca maxim global).

Dar putem transfera analiza pe bord (ceea ce oricum trebuia făcut), şi nu rămâne decât să stabilim că valorile în punctele critice de acolo sunt mai mici sau egale cu $L_{n,M}$.

• Dacă $\alpha_i + \alpha_j = \pi/2$ atunci, înlocuindu-le cu 0 şi $\pi/2$, valoarea lui $L_{n,M}(\cdots)$ nu se schimbă, dar ajungem pe bordul $\partial\mathcal{D}_{n,M}$ al domeniului, pe care îl putem analiza prin $L_{n-1,M}(\cdots)$ pe un domeniu $\mathcal{D}_{n-1,M}$ (desigur, avem atunci $M < n-1$).

• Dacă $\alpha_i + \alpha_j = 3\pi/2$ atunci, înlocuindu-le cu π şi $\pi/2$, valoarea lui $L_{n,M}(\cdots)$ nu se schimbă, dar ajungem pe bordul $\partial\mathcal{D}_{n,M}$ al domeniului, pe care îl putem analiza prin $L_{n-1,M-1}(\cdots)$ pe un domeniu $\mathcal{D}_{n-1,M-1}$(cu evident $M-1 < n-1$).

În general, analiza pe bordul $\partial\mathcal{D}_{n,M}$ al domeniului revine la cazul când avem z variabile egale cu zero şi p variabile egale cu π, unde $1 \leq z+p < n$ şi $0 < M-p < n-z-p$. Analiza se va face prin $L_{n-z-p,M-p}(\cdots)$ pe un domeniu $\mathcal{D}_{n-z-p,M-p}$. Cazurile limită (pentru valorile mici ale lui n) sunt

• $n-z-p = 1$, $M-p < \pi$. Atunci $L_{1,M-p}(\cdots) = \sin^2(M-p)\pi = 0$;

• $n-z-p = 2$, $M-p < 2\pi$. Atunci $L_{2,M-p}(\cdots) = 2\sin^2 \dfrac{M-p}{2}\pi \leq 2$.

Astfel, avem doar de comparat între ele valorile (din punctele critice) $L_{n-z-p,M-p} = (n-z-p)\sin^2 \dfrac{M-p}{n-z-p}\pi$, unde $0 \leq z+p < n$, cu condiţia de consistenţă $0 < M-p < n-z-p$.

Pentru $n = 5$ şi $M = 3$, aceasta duce la compararea valorilor

$L_{5,3}$	$5\sin^2 \frac{3}{5}\pi = \frac{5(5+\sqrt{5})}{8} \approx$	4.52
$L_{4,2}$	$4\sin^2 \frac{2}{4}\pi =$	4
$L_{4,3}$	$4\sin^2 \frac{3}{4}\pi =$	2
$L_{3,2}$	$3\sin^2 \frac{2}{3}\pi =$	2.25
$L_{3,1}$	$3\sin^2 \frac{1}{3}\pi =$	2.25
$L_{2,1}$	$2\sin^2 \frac{1}{2}\pi =$	2

de unde se vede că $L_{5,3}$ este într-adevăr un maxim global.

Să observăm însă că pentru $n > 5$ şi $M = n-2$ avem

$$L_{n,n-2} = n\sin^2 \frac{n-2}{n}\pi < L_{6,4} = 6\sin^2 \frac{4}{6}\pi = 4.5 < 4.52 \approx 5\sin^2 \frac{3}{5}\pi = L_{5,3},$$

căci funcţia $g\colon [2,\infty) \to [0,\infty)$ dată prin $g(x) = x\sin^2 \dfrac{2}{x}\pi$ este crescătoare pe $[2,\rho]$ şi descrescătoare pe $[\rho,\infty)$, unde punctul de maxim este $\rho \approx 5.39$, şi $g(5) \approx 4.52 > 4.5 = g(6)$. Prin urmare rezultatul nu mai rămâne adevărat pentru poligoane convexe cu $n > 5$ laturi.

Să observăm că dacă se cerea, în mod mai simplu, $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 \sin A_i \geq 2S$, problema devenea mai unitară şi geometrică, redusă exclusiv la Lema 1. Prezenţa inegalităţii din Lema 2 nu face decât să încarce problema (în mod inutil, după mine) cu o inegalitate auxiliară mai dificilă, şi în acest fel adaugă o complicaţie algebrică artificială.