CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A

Problema 1. Considerăm numerele complexe a, b, c, având acelaşi modul. Arătaţi că

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right|+\left|\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right| \leq 3\sqrt{3}.$$

Lucian-Georges Lăduncă, ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Fie $|a|=|b|=|c|=\rho$. Atunci

$$\sum\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right|=\sum\left|\frac{a^2-b^2}{ab}\right|=\frac{1}{\rho^2}\sum\left|a^2-b^2\right| \ldots \textbf{(1p)}$$

Se consideră punctele $A\left(a^2\right)$, $B\left(b^2\right)$ şi $C\left(c^2\right)$. Ele sunt situate pe cercul cu centrul în origine şi raza ρ^2. Relaţia din enunţ se rescrie sub forma

$$AB+BC+CA \leq 3\rho^2\sqrt{3} \ldots \textbf{(3p)}$$

Vom arăta că în orice triunghi ABC, înscris în cercul de rază R, este adevărată inegalitatea $AB+BC+CA \leq 3R\sqrt{3}$. Într-adevăr, via teorema sinusurilor, relaţia precedentă revine la $\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, iar aceast fapt rezultă din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei concave

$$\sin : (0,\, \pi) \to \mathbb{R} \ldots \textbf{(3p)}$$

Problema 2. Determinaţi numerele reale $x \in (\log_5 2, +\infty)$ cu proprietatea că

$$\left(3^x+2\right)^{\log_5 3}+2=\left(5^x-2\right)^{\log_3 5}.$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Soluţie. Ecuaţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$3^{\log_5\left(3^x+2\right)}+2=5^{\log_3\left(5^x-2\right)} \ldots \textbf{(1p)}$$

Cu notaţiile $y=\log_5\left(3^x+2\right)$ şi $z=\log_3\left(5^x-2\right)$, obţinem $3^y+2=5^z$. Deducem că $x=\log_5\left(3^z+2\right)$ şi $z=\log_5\left(3^y+2\right)$. Fie funcţia

$$f:(\log_5 2,+\infty) \to (\log_5 2,+\infty),\, f(t)=\log_5\left(3^t+2\right).$$

Atunci $f(x)=y, f(y)=z, f(z)=x$. . . . . **(2p)**

Funcţia f este strict crescătoare, obţinându-se prin compunere de funcţii strict crescătoare. Din considerente de simetrie circulară, putem presupune fie că $x \leq y \leq z$, fie că $x \geq y \geq z$; ne plasăm în primul caz, cel de-al doilea tratându-se similar. Rezultă că $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, adică $y \leq z \leq x$ şi, de aici, $x = y = z$. .... **(2p)**

Rămâne să rezolvăm ecuaţia $3^x + 2 = 5^x$. Aceasta este echivalentă cu $g(x) = 1$, unde

$$g : (\log_5 2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 2\left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

Observăm că funcţia g este strict descrescătoare, deci injectivă. Cum $g(1) = 1$, obţinem că $x = 1$ este unica soluţie a ecuaţiei din enunţ. .... **(2p)**

Problema 3. a) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că inegalitatea

$$|\cos nx| \leq n|\cos x|$$

este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi $x \in \mathbb{R}$, ştiind că inegalitatea

$$|\cos nx| \leq n|\cos x|$$

este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $x \in \mathbb{R}$, considerăm

$$P(n) : \ |\cos nx| \leq n|\cos x|.$$

Presupunând că $P(n)$ este adevărată, vom arăta că şi $P(n+2)$ este adevărată. Avem:

$$|\cos(n+2)x| = |\cos nx \cdot \cos 2x - \sin nx \cdot \sin 2x| \leq$$
$$\leq |\cos nx| \cdot |\cos 2x| + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \cdot |\sin nx| \leq$$
$$\leq |\cos nx| + 2|\cos x| \leq n|\cos x| + 2|\cos x| = (n+2)|\cos x| \ldots \textbf{(2p)}$$

a) Pentru *n* par, $P(n)$ nu poate fi adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$; de exemplu, pentru $x = \frac{\pi}{2}$, am obţine $1 \leq 0$, fals. Cum $P(1)$ este adevărată (cu egalitate) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru *n* impar, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. .... **(2p)**

b) $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru acele valori ale lui *x* pentru care este adevărată $P(2)$; avem deci de rezolvat inecuaţia $|\cos 2x| \leq 2|\cos x|$. Notând $c = |\cos x| \in [0,1]$, aceasta revine la $-2c \leq 2c^2 - 1 \leq 2c$, $c \in [0,1]$. Deducem că $c \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right]$. în final, obţinem soluţiile

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}, n\pi + \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] \ldots \textbf{(3p)}$$