CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL
BAREM DE CORECTARE
CLASA A IX-A

Problema 1. Fie P_d mulţimea tuturor pentagoanelor convexe cu toate laturile congruente între ele şi cu măcar d diagonale congruente. Să se demonstreze că $P_d = P_5$, pentru orice $d \geq 3$, şi că $P_2 \neq P_5$.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Pentru partea a doua, considerăm pătratul $BCDE$ şi construim în exteriorul său triunghiul echilateral ABE. Evident pentagonul $ABCDE$ are două diagonale egale şi toate laturile egale.

Vom demonstra că dacă avem trei diagonale congruente, atunci toate cele cinci diagonale sunt congruente. Să remarcăm mai întâi că oricum am lua trei diagonale din cele cinci AC, AD, BD, BE şi CE ale unui pentagon $ABCDE$ există două care pleacă din acelaşi vârf (fie acestea AC şi AD). Considerăm două cazuri:

Cazul 1. AC=AD=CE. Din congruenţa triunghiurilor ABC, AED şi CDE obţinem congruenţa unghiurilor $\angle BAC$, $\angle BCA$, $\angle DCE$, $\angle DEC$, $\angle EAD$ şi $\angle EDA$. Notăm cu x măsura unghiului $\angle BAC$ şi cu y măsura unghiului $\angle ADC$. Din congruenţa triunghiurilor ACD şi ACE obţinem $\angle AEC = \angle CAE = \angle ACD = y$. Cum $\angle AED = x + y$ se arată uşor că $\angle AED = \angle BAE = \angle BCD = \angle CDE = \angle ABC = x + y$, adică pentagonul are toate unghiurile egale şi deci este regulat, de unde rezultă că toate diagonalele sunt congruente.

Cazul 2. AC=AD=BE. Din congruenţa triunghiurilor ABC, AED şi ABE obţinem congruenţa unghiurilor $\angle BAC$, $\angle BCA$, $\angle ABE$, $\angle AEB$, $\angle EAD$ şi $\angle EDA$. Din inscriptibilitatea patrulaterelor $BCEA$, $ABDE$, $ACDE$ şi $ABCD$ rezultă congruenţa triunghiurilor BCD, CDE şi ABE, de unde rezultă că $BD = CE = BE$, adică toate diagonalele sunt congruente.

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine valoarea maximă a numărului c_n astfel încât

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 > c_n x_1 x_n,$$

pentru orice numere reale $0 \leq x_1 < \cdots < x_n$.

Problema 26935, Gazeta Matematică nr. 6-7-8

Soluţie. Vom arăta că $c_n = 4(n-1)$. Cazul $n = 2$ este trivial, deoarece dacă $x_1 \neq x_2$ avem $(x_1 + x_2)^2 > 4x_1x_2$. De asemenea, dacă $c_2 > 4$ atunci putem găsi $x_2 > x_1 > 0$ astfel ca $(x_1 + x_2)^2 = c_2 x_1 x_2$ (putem lua de exemplu $x_1 = 1$).

Fie $n \geq 3$. Dacă $0 \leq x_1 < \cdots < x_n$, atunci $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2 > [(n-1)x_1 + x_n]^2 \geq 4(n-1)x_1x_n$ (din inegalitatea mediilor). Deoarece c_n este numărul maxim cu proprietatea cerută, rezultă $c_n \geq 4(n-1)$.

Fie $\alpha > 0$. Presupunem prin absurd că $c_n = 4(n-1) + \alpha$ este o constantă "bună". In particular, pentru orice numere $0 \leq x_1 < \cdots < x_{n-1}$, luând $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ avem $4\sum_{i=2}^{n-1}(x_i - x_1) > \alpha x_1$. Pentru $x_1 = 1$ şi $x_{n-1} < 1 + \frac{\alpha}{4(n-2)}$ avem $4\sum_{i=2}^{n-1}(x_i - x_1) < \alpha$, contradicţie.

Problema 3. a) Fie $A(a_1, a_2)$ şi $B(b_1, b_2)$ două puncte distincte din planul xOy. Să se arate că aria triunghiului OAB este dată de formula

$$\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|.$$

b) Se dau perechile $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cu $n \geq 4$. Perechile sunt diferite două câte două şi verifică egalităţile $|a_1b_2 - a_2b_1| = |a_2b_3 - a_3b_2| = \cdots = |a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}| = |a_nb_1 - a_1b_n| = 1$.

Vom spune că perechile de mai înainte au proprietatea $\mathcal{P}$ dacă există $i, j \in \overline{1, n}, 1 < |i - j| < n - 1$, cu $|a_ib_j - a_jb_i| = 1$. Să se demonstreze că pentru $n = 5$ are loc proprietatea $\mathcal{P}$ şi că pentru $n = 4$ există perechi care nu verifică proprietatea $\mathcal{P}$.

Baraj Coreea, 2001

Soluţie. Formula de la punctul a) se demonstrează fără dificultate. Pentru cazul $n = 4$ este suficient să considerăm perechile $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ şi $(0, -1)$. Dacă $n \geq 5$ considerăm punctele laticeale $A_k(a_k, b_k)$, $k = \overline{1, n}$. Folosind formula de la punctul a) va fi suficient să arătăm că există punctele A_i şi A_j astfel ca $S(A_iOA_j) = \frac{1}{2}$. Fie OA_2 cel mai lung dintre segmentele OA_k. Vom considera mai multe cazuri:

Cazul 1'. Punctele A_1, O şi A_3 sunt necoliniare iar segmentul OA_2 se află între segmentele OA_1 şi OA_3. Cum $S(A_1A_2O) + S(A_2A_3O) > S(A_1A_3O)$ rezultă că $S(OA_1A_3) < 1$ şi deci $S(OA_1A_3) = \frac{1}{2}$.

Cazul 1". Punctele A_1, O şi A_3 sunt necoliniare iar segmentul OA_1 se află între segmentele OA_2 şi OA_3. Atunci $S(A_1A_2O) = S(A_2A_3O)$ şi deci $A_1A_3 \| A_2O$ de unde rezultă că unghiurile $\angle(A_3A_1O)$ şi $\angle(A_1OA_2)$ sunt congruente. Avem că $S(A_1A_3O) = \frac{1}{2}(A_1O \cdot A_1A_3 \cdot \sin(\angle(A_3A_1O)) = \frac{A_1A_3}{2A_2O} < \frac{A_1O + A_3O}{2A_2O} < 1$, de unde rezultă că $S(A_1A_3O) = \frac{1}{2}$.

Cazul 2. Punctele A_1, O şi A_3 sunt coliniare. Cum $S(A_1A_2O) = S(A_2A_3O)$ rezultă că $A_1) = A_3)$ şi deci $S(A_3A_4O) = S(A_4A_1O) = \frac{1}{2}$ de unde rezultă că $S(A_1A_4O) = \frac{1}{2}$.

Cazul 3. Segmentele OA_k sunt toate egale. Atunci $S(A_1A_3O) < S(A_1A_2O) + S(A_2A_3O) = 1$, de unde rezultă că $S(A_1A_3O) = \frac{1}{2}$.