CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL

BAREM DE CORECTARE
CLASA A VI-A

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere naturale nenule şi $(a, b) = 1$, arătaţi că numerele

$$A = \frac{c^2}{a+c} \quad \text{şi} \quad B = \frac{c^2}{b+c}$$

nu sunt ambele întregi.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie: Presupunem că ambele numere A şi B sunt întregi. Avem atunci $a + c \mid c^2$ şi $b + c \mid c^2$. . . . . 1 p

Dacă $(a+c, b+c) \neq 1$ înseamnă că există un număr prim p astfel încât $p \mid a+c$ şi $p \mid b+c$, ceea ce conduce la $p \mid c^2$ şi prin urmare $p \mid c$. . . . . 2 p

Astfel avem $p \mid (a + c) - c$, adică $p \mid a$ şi $p \mid (b + c) - c$, adică $p \mid b$. Aceasta este în contradicţie cu $(a, b) = 1$. . . . . 3 p

Prin urmare $(a + c, b + c) = 1$, şi atunci $(a + c)(b + c) \mid c^2$, ceea ce conduce la $c^2 \geq (a + c)(b + c)$, imposibil. . . . . 1 p

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC cu

$$m(\widehat{A}) = 2 \cdot m(\widehat{B}) + 30^0.$$

Punctul M este situat pe segmentul (BC) astfel încât $AM = AC$. Dacă $m(\widehat{MAC}) = 2 \cdot m(\widehat{MAB})$, arătaţi că $BM = MC$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Soluţie: Notăm $m(\widehat{B}) = x$ şi în triunghiul ABC avem $m(\widehat{A}) = 2x+30^0$ iar $m(\widehat{C}) = 150^0 - 3x$. Dar $\triangle ACM$ este isoscel şi atunci avem egalitatea $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{AMC}) = 150^0 - 3x$. $\widehat{AMC}$ este unghi exterior pentru $\triangle AMB$ şi atunci obţinem că $m(\widehat{MAB}) = 150^0 - 4x$. . . 2 p

Rescriem relaţia $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{CAM}) + m(\widehat{MAB})$ şi acum utilizând informaţia $m(\widehat{MAC}) = 2 \cdot m(\widehat{MAB})$ din ipoteză, obţinem ecuaţia $2x + 30^0 = 3 \cdot (150^0 - 4x)$, cu soluţia $x = 30^0$. . . . . 2 p

Deci $\triangle ABC$ este dreptunghic, $\triangle ACM$ este echilateral şi $\triangle AMB$ este isoscel, astfel că $MB = AM = MC$. 3 p

Problema 3. Se consideră 50 de numere naturale nenule diferite, de valori cel mult 625. Arătaţi că există trei perechi de numere astfel încât diferenţa numerelor din fiecare pereche să fie aceeaşi.

Soluţie: Notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ cele 50 de numere şi putem presupune $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{50} \leq 625$. Avem atunci

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{50} - a_{49}) = a_{50} - a_1 \leq 624$ (1) . . . . 3 p

Presupunem că există doar două perechi de numere la care diferenţa este aceeaşi. Avem atunci

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{50} - a_{49}) \geq 2 \cdot 1 + \cdots + 2 \cdot 24 + 25 = 625$ (2) . . . . 3 p

Din (1) şi (2) obţinem contradicţia $625 \leq 624$, ceea ce duce la concluzia că există trei perechi de numere având diferenţa între ele aceeaşi. . . . . 1 p