Problemă. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ care au proprietatea că există o mulţime de n puncte în plan având $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie.

Manuela Prajea

Soluţie. „Dacă $n = 2$, atunci mulţimea $\{A_1,\ A_2\}$ are $\dfrac{2 \cdot (2-1)}{2} = 1$ axe de simetrie" este o afirmaţie falsă (o axă de simetrie este mediatoarea segmentului A_1A_2, dar şi dreapta A_1A_2 este axă de simetrie).

Dacă $n \geq 3$ notăm $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ o mulţime cu n puncte şi care are $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie. Dacă o axă de simetrie conţine toate punctele din $\mathcal{A}$, atunci nu pot exista decât cel mult două axe de simetrie, absurd. Aşadar pentru fiecare axă de simetrie d există un punct $A \in \mathcal{A}$ ne-situat pe d. Atunci şi simetricul lui A faţă de d aparţine lui $\mathcal{A}$, deci d este mediatoarea segmentului determinat de o pereche de puncte din $\mathcal{A}$. Deoarece trebuie să avem $\dfrac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie, adică tocmai numărul perechilor de puncte (distincte) din $\mathcal{A}$, rezultă că axele de simetrie sunt exact mediatoarele segmentelor determinate de punctele din $\mathcal{A}$.

Fie m_{ij} mediatoarea unui segment A_iA_j. Dacă $A_k \in \mathcal{A}$, diferit de A_i şi A_j nu este situat pe mediatoara m_{ij}, notăm A_p simetricul lui A_k faţă de m_{ij}. Atunci $m_{ij} = m_{kp}$ şi numărul axelor de simetrie ar fi mai mic decât $\dfrac{n(n-1)}{2}$. În concluzie, $A_k \in m_{ij}$, adică toate punctele din $\mathcal{A}$, diferite de A_i şi A_j, se află pe mediatoarea m_{ij}.

Dar acest lucru este evident imposibil pentru $n > 3$, deci singura posibilitate este pentru $n = 3$, anume mulţimea $\mathcal{A}$

formată din vârfurile unui triunghi echilateral.