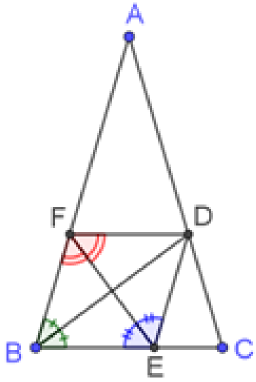
Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in (AC)$. Pe latura BC alegem punctul E astfel încât $BE = DC$. Bisectoarea unghiului BED intersectează latura AB în punctul F. Arătaţi că $\sphericalangle BFE = \sphericalangle DFE$.

Soluţie



Fie CM bisectoarea unghiului ACB, $M \in AB$. Din congruenţa triunghiurilor MBC şi DBC $U.L.U.$ rezultă $MB = DC = BE$ astfel că triunghiul BME este isoscel.

Notăm $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2x$. Atunci avem $\sphericalangle BME = \sphericalangle BEM = 90° - x$.

Deoarece $AB = AC$ şi $MB = DE$ rezultă $AM = AD$, astfel că triunghiul AMD este isoscel cu $\sphericalangle AMD = \dfrac{180° - \sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle ABC$. Fiind unghiuri corespondente rezultă $MD \parallel BC$, de unde obţinem $\sphericalangle MDB = \sphericalangle DBE = x$, adică $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MDB$. Obţinem de aici că triunghiul MBD este isoscel. În patrulaterul $BMDE$, $MD = MB = BE$, iar $MD \parallel BE$, deci $MBED$ este romb.

Atunci rezultă EM este bisectoarea unghiului BED. Dar EF este bisectoarea unghiului BED, iar $F, M \in AB$, astfel că punctele F şi M coincid. În consecinţă $\sphericalangle BFE = \sphericalangle DFE$.