CLASA A VIII-A

1. Determinaţi numerele prime p care au proprietatea că există m, n numere naturale nenule astfel încât $\frac{5}{p}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

prelucrare a problemei E:14695 din GM. nr. 6-7-8

Soluţie: Arătăm că numerele căutate sunt 5 şi numerele prime care dau restul 4 la împărţirea cu 5.
Studiem mai întâi cazurile $p=2$, $p=3$, $p=5$. Cum $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{1}{1}+\frac{1}{1}<\frac{5}{2}$, $p=2$ nu are această proprietate. Pentru $p=3$, dacă $m,n\ge 2$ atunci $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le 1<\frac{5}{3}$, iar dacă $m=1$ ar trebui $\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$, $n\in\mathbb{N}^*$, imposibil. Deci nici $p=3$ nu are proprietatea din enunţ. În fine, pentru $p=5$ găsim $m=n=2$ astfel ca $\frac{5}{p}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$. Pentru $p>5$, presupunem că există numerele naturale m şi n cu proprietatea din enunţ. Relaţia $\frac{5}{p}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ se scrie echivalent $5mn=pm+pn$, adică $25mn-5pm-5pn+p^2=p^2$, care revine la $(5m-p)(5n-p)=p^2$. Deoarece $\frac{5}{p}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$, rezultă $5m>p$ şi, analog, $5n>p$, deci $5m-p$ şi $5n-p$ trebuie să fie divizori pozitivi ai lui p^2, deci 1, p sau p^2. Cazul $5m-p=5n-p=p$ duce la $5m=2p$ adică la $5\mid p$, ceea ce nu se poate. Rămâne că $5m-p=1$ şi $5n-p=p^2$ (sau invers, nu contează). Din prima relaţie rezultă că $p=5m-1$ trebuie să dea restul 4 la împărţirea cu 5.
Reciproc, dacă p dă restul 4 la împărţirea cu 5, din relaţiile de mai sus se vede că putem alege $m=\frac{p+1}{5}\in\mathbb{N}^*$ şi $n=\frac{p(p+1)}{5}\in\mathbb{N}^*$, numere care satisfac relaţia $\frac{5}{p}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

2. a) Demonstraţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, există $k\in\mathbb{N}^*$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=n.$$

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care ecuaţia

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=n$$

are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

* * *

Soluţie: **a)** De exemplu se poate lui $k = n-1$ şi $a_j = j$. Vom avea că $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1} = n$.

b) Din $1 < 1 + \frac{1}{x} \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$, deducem că putem avea soluţii numai cu $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Pentru $n = 2$ avem, de exemplu soluţia $(a,b,c) = (3,4,5)$; pentru $n = 3$ avem de exemplu $(a,b,c) = (1,3,8)$; pentru $n = 4$ avem $(a,b,c) = (1,2,3)$; pentru $n = 5$ putem lua $(a,b,c) = (1,1,4)$; pentru $n = 6$ avem $a = 2$, $b = c = 1$; pentru $n = 8$, $a = b = c = 1$; pentru $n = 7$: dacă $a = b = c = 1$ atunci obţinem 8, iar în caz contrar obţinem cel mult $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 6$. Aşadar soluţii avem pentru $n \in \{2,3,4,5,6,8\}$.

c) Putem presupune $a \geq b \geq c$. Observăm că trebuie ca $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3 \geq 2$, de unde $c \leq 3$.

• Dacă $c = 1$ atunci ar trebui ca $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$, ceea ce este imposibil.

• Dacă $c = 2$ atunci $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$, deci $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{4}{3}$, de unde $b \leq 6$.
Încercând aceste valori obţinem soluţiile $(a,b,c) \in \{(7,6,2),(9,5,2),(15,4,2)\}$.

• Dacă $c = 3$ atunci $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$, deci $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{3}{2}$, de unde $b \leq 4$, adică $b \in \{3,4\}$. Găsim soluţiile $(a,b,c) = (8,3,3)$ şi $(5,4,3)$.

3. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere, doi de 1 şi 2012 de 0. Se poate efectua următoarea operaţie: se alege un număr şi i se schimbă cei doi vecini din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem să obţinem 2014 de 1 pe cerc?

ViitoriOlimpici.ro, etapa 5, problema 4

Soluţie: Soluţie: Răspunsul depinde de poziţia celor două cifre de 1 de pe cerc. Dacă colorăm cele 2014 numere, alternativ, în alb şi negru, răspunsul este că dacă cele două cifre de 1 au aceeaşi culoare atunci nu putem face ca toate numerele de pe cerc să devină 1, în vreme ce în cazul în care cele două cifre de 1 au culori diferite, putem ajunge la configuraţia finală dorită.

Dacă 1-urile au aceeaşi culoare: să observăm că numărul de 1-uri negre este invariant la o operaţie. Orice operaţie vizează fie două numere negre fie două numere albe. Dacă ea vizează numere negre, numărul de 1-uri negre poate să crească cu 2 (dacă se schimbă două 0-uri negre în 1-uri), să scadă cu 2 (dacă se schimbă două 1-uri negre în 0-uri) sau să rămână neschimbat dacă se schimbă un 0 şi un 1 într-un 1 şi respectiv un 0. Dacă iniţial 1-urile au aceeaşi culoare, atunci avem fie zero fie două 1-uri negre, oricum un număr par. Prin urmare numărul de 1-uri negre de pe cerc va fi mereu par. La final, ar trebui să avem numai 1-uri, în particular 1007 1-uri negre, adică un număr impar. Acest lucru nu este posibil, deci nu putem ajunge la respectiva configuraţie.

Dacă 1-urile au culori diferite: să observăm că putem face cei doi de 1 să fie vecini. Într-adevăr, dacă iniţial ei nu sunt vecini, putem alege un 0 vecin cu un 1 şi face operaţia. Efectul este că 1-le se va ,,muta” în poziţia simetrică faţă de 0-ul ales. Repetând această manevră, putem face ca cei doi de 1 să devină vecini. Celelalte 2012 numere le grupăm acum câte 4. În fiecare din cele 503 grupe, alegem, pe rând, cele două cifre din mijloc şi facem operaţia. Cele două operaţii vor transforma grupa de patru 0-uri în patru de 1. Procedând astfel pentru fiecare grupă, vom transforma toate numerele de pe cerc în 1-uri.