Problemă. Să se arate că orice mulţime de numere întregi cu 2012 elemente conţine o submulţime cu proprietatea că suma elementelor acestei submulţimi este divizibilă cu 2012.

Manuela Prajea , Drobeta Turnu-Severin

Soluţie Fie $A = \{a_1,\ a_2,\ ..., a_{2012}\} \subset \mathbb{Z}$ şi numerele întregi $N_1 = a_1;\ N_2 = a_1 + a_2;\ ...;\ N_{2012} = a_1 + a_2 + ... + a_{2021}$

i) Dacă unul dintre aceste numere e divizibil cu 2012 atunci problema e rezolvată.

Dacă $N_k \vdots 2012$ atunci $\{a_1,\ a_2,\ ..., a_k\}$ e submulţimea căutată.

ii) Dacă niciunul din numerele $N_1,\ N_2,\ ...\ N_{2012}$ nu este divizibil cu 2012, atunci resturile posibile la împărţirea lor cu 2012 ar fi din mulţimea $\{1,\ 2,\ ...,\ 2011\}$. Cum sunt 2012 numere şi 2011 resturi posibile, conform principiului cutiei, există două dintre ele care dau acelaşi rest la împărţirea cu 2012. Fie acestea N_i şi N_j, $i < j$. Atunci $N_j - N_i \vdots 2012$ şi cum $N_j - N_i = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j$ avem că $\{a_{i+1},\ a_{i+2},\ ...,\ a_j\}$ va fi submulţimea căutată.