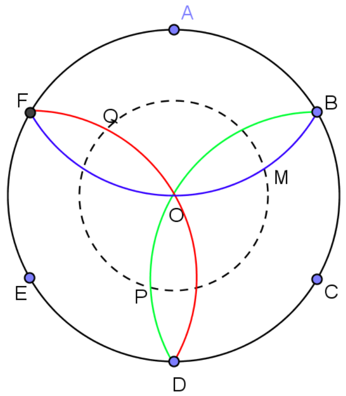
Problemă. Se colorează punctele unui cerc de rază 1 (din interior şi de pe frontieră) cu 3 culori. Arătaţi că există o infinitate de segmente de lungime 1 având extremităţile de aceeaşi culoare.

Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris în cercul dat, O centrul acestuia şi M_1, M_2, M_3 mulţimile de puncte colorate cu cele trei culori date.

Presupunem, prin absurd, că nu există două puncte colorate la fel, situate la distanţă 1.

Dacă $O \in M_1$, atunci A, C, $E \in M_2$ şi B, D, $F \in M_3$.



Considerăm cercul $C\left(O; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Acesta va intersecta cercurile $C(A;1)$, $C(C;1)$, $C(E;1)$ în punctele M, P, respectiv Q, centrele triunghiurilor echilaterale BOC, DOE, respectiv FOA.

Punctele M, P, Q nu sunt din mulţimea M_2 deoarece $AM = CP = EQ = 1$, iar A, C, $E \in M_2$. De asemenea, deoarece $DM = FP = BQ = 1$ şi D, F, $B \in M_3$, rezultă că M, P, $Q \notin M_3$. Rezultă atunci că M, P, $Q \in M_1$. Dar

$\triangle MPQ$ este echilateral de latură 1 rezultă că există puncte de aceeaşi culoare situate la distanţa 1, contradicţie.

Aşadar, există două puncte de aceeaşi culoare la distanţă 1.

Rotind hexagonul iniţial astfel încât vârful A să parcurgă arcul AB vom obţine o infinitate de hexagoane şi de fiecare dată cel puţin un segment de lungime 1 cu capetele de aceeaşi culoare. Segmentele „monocolore” găsite nu se pot repeta, aşadar rotind hexagonul se găsesc o infinitate de segmente „monocolore” distincte.