Problema 4
Etapa 1
Clasa a VI-a

Problema 4. Determinați numerele naturale x, y, z și numărul prim p știind că $p + (x + y)(y + z)(z + x) = 32$.

* * *

Soluţie: Dacă x, y și z sunt numere naturale, atunci cel puțin unul dintre numerele $x + y$, $y + z$ și $z + x$ este număr par.

Într-adevăr, presupunănd că $x + y$, $y + z$ și $z + x$ sunt toate impare, rezultă că suma lor este un număr impar. Dar $(x + y) + (y + z) + (z + x) = 2x + 2y + 2z$ care este număr par. Avem o contradicție, deci cel puțin una dintre sume este număr par și de aici produsul $(x + y)(y + z)(z + x)$ este număr par.

Cum 32 este număr par deducem că p trebuie să fie număr par. Dar p este număr prim, deci $p = 2$.

Atunci $(x + y)(y + z)(z + x) = 30$.

Deoarece $30 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ sunt posibile cazurile

$$A : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 3 \\ z + x = 10 \end{cases} \quad B : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 15 \end{cases} \quad C : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 5 \\ z + x = 6 \end{cases} \quad D : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z + x = 5 \end{cases}$$

În fiecare caz avem 6 variante deoarece $1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 10 \cdot 3 = 3 \cdot 1 \cdot 10 = 3 \cdot 10 \cdot 1 = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 10 \cdot 3 \cdot 1$ și la fel celelalte.

În situația dată mai sus, adunând, în fiecare caz, cele trei relații obținem

$$A : 2x+2y+2z = 14 \;\; B : 2x+2y+2z = 18 \;\; C : 2x+2y+2z = 12 \;\; D : 2x+2y+2z = 10$$

sau

$$A : x + y + z = 7 \quad B : x + y + z = 9 \quad C : x + y + z = 6 \quad D : x + y + z = 5$$

În primele două cazuri nu avem soluții numere naturale.

În cazul C obținem $x = 1, y = 0, z = 5$ și încă alte 5 variante: $x = 1$, $y = 5, z = 0$, $x = 0, y = 1, z = 5$, $x = 0, y = 5, z = 1$, $x = 5, y = 0, z = 1$ și $x = 5, y = 1, z = 0$.

În cazul D obținem $x = 2, y = 0, z = 3$ și încă alte 5 variante în care numerele 2, 0 și 3 își schimbă locurile.