

Problema 3. Determinați numerele prime a, b și c pentru care

$$5a + b^2 + 5b + c = 91.$$

* * *

Soluție: Numărul $b^2 + 5b$ este număr par, oricare ar fi numărul prim b . Avem $b^2 + 5b = b(b + 5)$.

Dacă b este număr par, atunci $b^2 + 5b$ este număr par.

Dacă b este număr impar, atunci $b + 5$ este număr par și deci $b^2 + 5b$ este număr par.

Cum 91 este număr impar deducem că $5a + c$ trebuie să fie număr impar. Atunci unul dintre numerele a sau c este par, iar celălalt este impar.

Dacă a este număr par, cum el este și număr prim, avem $a = 2$, iar relația devine $b^2 + 5b + c = 81$.

Pentru $b \geq 7$ nu avem soluții deoarece $b^2 + 5b \geq 84$ care este mai mare decât 81.

Pentru $b = 2$ obținem $c = 67$.

Pentru $b = 3$ obținem $c = 57$ care nu este număr prim.

Pentru $b = 5$ obținem $c = 31$.

Dacă c este număr par, cum el este și număr prim, avem $c = 2$, iar relația devine $5a + b^2 + 5b = 89$.

Pentru $b \geq 11$ nu avem soluții deoarece $b^2 \geq 121$ care este mai mare decât 81.

Pentru $b = 2$ obținem $a = 15$ care nu este număr prim .

Pentru $b = 3$ obținem $a = 13$.

Pentru $b = 5$ nu obținem a număr natural.

Pentru $b = 7$ obținem $a = 1$ care nu este număr prim.