CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL

BAREM DE CORECTARE

CLASA A V-A

Problema 1. Daniela are în coş pere şi prune. Cu acestea poate alcătui grupe formate dintr-o pară şi trei prune. Dacă mănâncă 2 pere şi mai adaugă 4 prune, va putea forma grupe formate dintr-o pară şi cinci prune. Câte pere şi câte prune a avut la început în coş?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie: Notând cu a, respectiv b, numărul de pere, respectiv de prune, din prima afirmaţie deducem $b = 3a$ .... 3 p

Din a doua afirmaţie avem $b + 4 = 5(a - 2)$ .... 2 p

Înlocuind pe b obţinem $3a + 4 = 5a - 10$, de unde $a = 7$ şi apoi $b = 21$ .... 2 p

Problema 2. Aflaţi valorile numărului natural n pentru care numărul

$$P = 16^n + 6^n + 5$$

se poate scrie ca o sumă de două numere prime.

Gazeta Matematică

Soluţie: Numărul P este impar, oricare ar fi n număr natural. .... 2 p

Dacă P se scrie ca o sumă de două numere prime, atunci unul dintre numere este 2, iar celălalt este impar $p = P - 2 = 16^n + 6^n + 3$ .... 2 p

Deoarece ultima cifră a numărului $p = 16^n + 6^n + 3$ este 5, rezultă că $5 \mid p$. Cum singurul număr prim divizibil cu 5 este 5, deducem că $p = 5$. Valoarea 5 se obţine doar când $n = 0$ .3 p

Problema 3. Se consideră mulţimea

$$A = \{3^m \cdot 5^n + 3 \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Aflaţi câte pătrate perfecte conţine mulţimea A.

b) Aflaţi numărul minim de elemente distincte ce trebuie luate din mulţimea A pentru a fi siguri că printre ele există 2014 numere astfel încât oricare două dintre acestea au diferenţa divizibilă cu 10.

Soluţie: Notăm $u(x)$ ultima cifră a numărului x.

a) Dacă $n \neq 0$, atunci $u(3^m \cdot 5^n + 3) = 8$, dar un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 8. 1 p

Dacă $n = 0$, numărul devine $3^m + 3$. Dacă $m \neq 0$, atunci se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, prin urmare nu este pătrat perfect. .... 1 p

Dacă $n = 0$ şi $m = 0$, atunci $3^0 \cdot 5^0 + 3 = 4$, pătrat perfect. .... 1 p

b) Diferenţa a două numere este divizibilă cu 10 dacă cele două numere au ultima cifră identică. .... 1 p

Dacă $n \neq 0$, atunci $u(3^m \cdot 5^n + 3) = 8$.

Dacă $n = 0$, atunci $u(3^m \cdot 5^n + 3) \in \{0, 2, 4, 6\}$.

Din cele de mai sus deducem că $u(3^m \cdot 5^n + 3)$ are 5 forme posibile. .... 2 p

Pentru a fi siguri că avem 2014 numere astfel încât diferenţa oricăror două să se dividă cu 10, dat fiind că putem să fi luat câte 2013 numere pentru fiecare ultimă cifră de mai sus, mai trebuie luat încă un număr. Prin urmare avem nevoie de $5 \cdot 2013 + 1 = 10066$ numere. .... 1 p