CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL

BAREM DE CORECTARE

CLASA A XI-A

Problema 1. Să se determine limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, definit prin

$$x_1 = 2, \quad \ln\sqrt{x_{n+1}} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}.$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Observăm că $x_{n+1} = f(x_n)$, cu $f : t \in [1,\infty) \mapsto \mathrm{e}^{2\frac{t-1}{t+1}} \in [1,\infty)$. Deoarece f este strict crescătoare, numerele $x_{n+2} - x_{n+1} = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ şi $x_{n+1} - x_n$ au acelaşi semn oricare ar fi $n \geq 1$, deci şirul este monoton. Cum $x_2 = \mathrm{e}^{2/3} < 2$, deducem că şirul este decrescător.

De aici şi din faptul că termenii şirului sunt pozitivi reiese că şirul este şi mărginit, deci convergent.

Fie a limita sa. Din proprietăţile şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi din continuitatea funcţiei f rezultă $f(a) = a,\ a \in [1,2]$. Considerând funcţia $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x-1}{x+1}$ constatăm că $g'(x) > 0$ pentru $x > 1$, ceea ce arată că $g(x) > g(1)$ pentru $x > 1$, deci ecuaţia $f(a) = a$, echivalentă cu $g(\ln a) = \ln a$ are soluţia unică $a = 1$.

Problema 2. Vom spune că o funcţie reală are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă este definită pe un interval nedegenerat I şi, pentru orice $x \in I$, $x > \inf I$, există $y \in I$, $y < x$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

a) Să se dea exemplu de funcţie neconstantă care este continuă pe domeniul de definiţie şi are proprietatea $\mathcal{P}$.

b) Să se arate că dacă funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[0,1]$ şi are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci f este constantă.

Soluţie. a) Un exemplu este $f : (0,\infty) \to [-1,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Într-adevăr, dacă $x > 0$, atunci $0 < y = \frac{x}{1+2\pi x} < x$ şi $f(x) = f(y)$.

b) Vom arăta că, dacă $x \in (0,1]$, atunci $f(x) = f(0)$. Pentru aceasta considerăm mulţimea $A = \{y \in [0,x) \mid f(y) = f(x)\}$. Mulţimea A este nevidă (conform ipotezei) şi mărginită, deci există $a = \inf A$. Deoarece f este continuă şi a este limita unui şir $(a_n)_n$ de elemente din A, rezultă $f(a) = \lim f(a_n) = f(x)$. Dacă presupunem $a \neq 0$, atunci există $b \in [0,a)$ astfel încât $f(b) = f(a) = f(x)$, adică $b \in A$ – contradicţie cu definiţia lui a. Astfel $a = 0$, deci $f(x) = f(0)$.

Problema 3. Arătaţi că dacă o permutare $\sigma \in S_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) are descompunerea în cicluri disjuncte (incluzând ciclurile de lungime 1) $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$, atunci numărul minim de transpoziţii în care se descompune σ este $n - k$.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. (i) Arătăm mai întâi că afirmaţia este valabilă pentru un ciclu C de lungime $n \geq 3$ (pentru $n = 2$ este evident). Deoarece $(i_1 i_2 \dots i_n) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{n-1} i_n)$, avem o descompunere a ciclului în $n - 1$ transpoziţii.

(ii) Să presupunem acum că o descompunere cu număr minim de transpoziţii a lui C este $t_1 t_2 \dots t_m$; evident $m \geq 2$. Dacă $t_1 = (a, b)$ nu are elemente comune cu celelalte transpoziţii, atunci C se poate scrie ca produsul dintre t_1 şi un produs de cicluri care nu au elemente comune cu t_1 – contradicţie cu unicitatea descompunerii unei permutări în produs de cicluri fără elemente comune. Astfel există o transpoziţie t_j, $j > 1$, având elemente comune cu t_1; dacă i este cel mai mic indice pentru care se întâmplă acest lucru, atunci $t_1 t_2 \dots t_{i-1} t_i \dots = t_2 \dots t_{i-1} t_1 t_i \dots$, $t_i = (a, c)$, $c \neq b$ (altfel se contrazice minimalitatea lui m) şi $t_1 t_i = (a, c, b) := C_1$. Construim recursiv ciclurile $C_1, C_2, \dots C_{m-1}$, de lungimi $3, 4, \dots, m + 1$, compunând C_k cu ,,cea mai apropiată " transpoziţie t dintre cele ,,rămase" după obţinerea lui C_k şi care are elemente comune cu C_k (transpoziţia poate fi la stânga sau la dreapta lui C_k). O astfel de transpoziţie există, deoarece dacă C_k nu are elemente comune cu transpoziţiile rămase, atunci, ca mai sus, se contrazice unicitatea descompunerii lui C în produs de cicluri fără elemente comune. În plus, dacă $t = (i_1 i_p)$ şi $C_k = (i_1, \dots, i_p, \dots i_{k+2})$, atunci $tC_k = (i_1 i_2) \dots (i_{p-2} i_{p-1})(i_p i_{p+1}) \dots (i_{k+1} i_{k+2})$ şi $C_k t = (i_1 i_{p+1})(i_{p+1} i_{p+2}) \dots (i_{k+1} i_{k+2}) (i_2 i_3) \dots (i_{p-1} i_p)$ se pot scrie ca un produs de k transpoziţii, ceea ce contrazice minimalitatea lui m. Aşadar t are exact un element comun cu C_k şi este uşor de verificat că tC_k şi $C_k t$ sunt cicluri de lungime $k + 3$.

Deoarece C_{m-1} are lungime $m + 1$ şi $C_{m-1} = C$, deducem $m = n - 1$.

(iii) Pentru afirmaţia generală, folosind cele de mai sus observăm că dacă $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$, cu c_i ciclu de lungime l_i, atunci σ se poate descompune în produs de $(l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \dots + (l_k - 1) = n - k$ transpoziţii.

(iv) În sfârşit, să presupunem că o descompunere cu număr minim de transpoziţii a lui σ este $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_q$. Atunci, prin compunerea transpoziţiilor τ_1, τ_2, $\dots$, τ_q (nu neapărat în această ordine), obţinem ciclurile lui σ. Din (ii) rezultă că pentru a obţine un ciclu de lungime l sunt necesare cel puţin $l - 1$ transpoziţii, deci, cu notaţiile de la (iii), $q \geq n - k$.