Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a X-a

Problema 3. Într-o urnă se găsesc a_k bile identice de culoare C_k, pentru fiecare $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, unde numerele $n,a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbb{N}^*$ sunt date, iar $C_1,C_2,\ldots,C_n$ sunt culori distincte. Numim *configuraţie* de bile o mulţime nevidă de bile din urnă. Două configuraţii de bile sunt considerate identice atunci când, pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ ele conţin exact acelaşi număr de bile de culoare C_k. Definim *paleta* unei configuraţii de bile ca fiind numărul de culori distincte ale bilelor sale. De exemplu, o configuraţie compusă din 4 bile roşii, 2 bile galbene şi 5 bile albastre are paleta 3, iar o configuraţie compusă din 7 bile roşii are paleta 1.

Dacă notăm cu N suma paletelor tuturor configuraţiilor distincte de bile ce pot fi obţinute cu bile din urnă, arătaţi că

$$N \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+1)^{n-1}.$$

Cristi Săvescu

Soluţie: Observăm mai întâi că paleta oricărei configuraţii de bile este un număr p, unde $p \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Fie p fixat. Vom determina câte configuraţii au paleta p. O configuraţie de bile cu paleta p este caracterizată de o mulţime de p culori $\{C_{i_1},C_{i_2},\ldots,C_{i_p}\} \subset \{C_1,C_2,\ldots,C_n\}$ şi de numerele de bile $b_{i_1} \in \{1,2,\ldots,a_{i_1}\}$, $b_{i_2} \in \{1,2,\ldots,a_{i_2}\},\ldots$, $b_{i_p} \in \{1,2,\ldots,a_{i_p}\}$ de culori $C_{i_1},C_{i_2},\ldots$, respectiv C_{i_p} pe care aceasta le are. Atunci numărul configuraţiilor de paletă p este

$$N_p = \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,2,\ldots,n\}} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_p}.$$

Deoarece $N = \sum\limits_{p=1}^{n} p \cdot N_p$, folosind inegalitatea mediilor, obţinem

$$N = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,2,\ldots,n\}} p \cdot a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_p} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,2,\ldots,n\}} \left(a_{i_1}^p + a_{i_2}^p + \cdots + a_{i_p}^p\right).$$

În suma din urmă, pentru fiecare $p \in \{1,2,\ldots,n\}$, termenul a_k^p apare de C_{n-1}^{p-1} ori, adică numărul de submulţimi cu p elemente ale lui $\{1,2,\ldots,n\}$ care îl conţin pe k, oricare ar fi $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Rezultă

$$N \leqslant \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p \cdot C_{n-1}^{p-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cdot \sum_{p=1}^{n} a_k^{p-1}C_{n-1}^{p-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+1)^{n-1}.$$

Barem:

Ideea de a număra configuraţiile cu paletă p şi $N = \sum_{p=1}^{n} p \cdot N_p$ **1p**

$N_p = \sum_{\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,2,\ldots,n\}} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_p}$ **2p**

Aplicarea inegalităţii mediilor **1p**

Numărarea termenilor de forma a_i^p **1p**

Finalizare **2p**

Observaţie: O configuraţie de bile se obţine aşezând bile din urna iniţială în n urne, pe culori, unele dintre aceste urne putând fi goale, dar nu toate odată:

$1 + a_1$ valori posibile	$1 + a_2$ valori posibile	$\ldots$	$1 + a_n$ valori posibile
C_1	C_2	$\ldots$	C_n

Numărul tuturor configuraţiilor posibile este $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) - 1$. Avem:

$$N = \sum_{p=1}^{n} p \cdot N_p \leqslant n \cdot \sum_{p=1}^{n} N_p = n \cdot ((1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) - 1) <$$

$$< n(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)^n.$$

O astfel de abordare şi obţinerea inegalităţii mai slabe $N < \sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)^n$ conduce la acordarea a 3 puncte.