ViitoriOlimpici.ro

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a IX-a

Problema 2. Determinaţi funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea că

$$x \cdot f(x) + y \cdot f(y) + f(x+y) + 2 \cdot x \cdot y = f^2(x+y),$$

pentru orice numere naturale x şi y.

Soluţie:

Notăm $P(x,y)$ predicatul de două variabile din enunţ. Fie f o funcţie care verifică ipoteza. Din $P(x,0)$ rezultă că

$$(x+1) \cdot f(x) = f^2(x),$$

astfel că $f(x) \in \{0,x+1\}$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$. **2p**

Deoarece f este strict crescătoare, pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ avem $f(x) > 0$, deci $f(x) = x+1$. . **2p**

Obţinem că $f \in \{f_1,f_2\}$, unde $f_1(x) = x+1$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$, iar

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & , \text{dacă } x = 0, \\ x+1 & , \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

care ambele verifică condiţia cerută - $P(x,y)$ pentru orice $x,y \in \mathbb{N}$. **3p**