PROBLEME CU NUMERE RAŢIONALE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva probleme care pot să apară între subiectele de la concursurile de matematică.

Lecţia se adresează clasa a VI-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Problema 1: Găsiţi cel mai mic număr natural $\overline{abcd}$, cu cifre diferite, ştiind că numerele $\frac{73}{168} \cdot \overline{abcd}$, $\frac{65}{126} \cdot \overline{abcd}$ şi $\frac{35}{72} \cdot \overline{abcd}$ sunt naturale.

Soluţie: Pentru a putea rezolva problema avem în vedere următoarele afirmaţii:

P$_1$) $\frac{m}{n} \cdot p = \frac{m \cdot p}{n}$

P$_2$) Dacă $\frac{m}{n}$ este număr natural atunci "n este un divizor al lui m" sau "m este un multiplu al lui n".

Acestea fiind spuse să trecem la rezolvarea problemei.

Avem $\frac{73}{168} \cdot \overline{abcd} = \frac{73 \cdot \overline{abcd}}{168}$ care este număr natural dacă 168 divide $73 \cdot \overline{abcd}$. Cum 168 şi 73 sunt prime între ele deducem

$$168 \text{ divide } \overline{abcd} \ (1).$$

De asemenea, $\frac{65}{126} \cdot \overline{abcd} = \frac{65 \cdot \overline{abcd}}{126}$ care este număr natural dacă 126 divide $65 \cdot \overline{abcd}$. Cum 126 şi 65 sunt prime între ele deducem

$$126 \text{ divide } \overline{abcd} \ (2).$$

Analog găsim

$$72 \text{ divide } \overline{abcd} \ (3).$$

Dar afirmaţiile (1), (2) şi (3) pot fi formulate şi astfel:

$$\overline{abcd} \text{ este multiplu al numerelor } 168,\ 126 \text{ şi } 72.$$

Dintre toţi multiplii comuni a două sau mai multe numere noi ştim să-l aflăm pe cel mai mic. În cazul nostru acesta este 504 şi atunci numărul căutat va fi

$$\overline{abcd} = 504 \cdot k.$$

Cum numărul căutat trebuie să fie cel mai mic şi cu cifre diferite deducem că

$$\overline{abcd} = 2016.$$

Problema 2: Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul $\dfrac{9n+17}{2n+1}$ este natural.

Soluţie: Pentru rezolvarea acestei probleme folosim P_2 de la problema 1 şi următoarele proprietăţi ale divizibilităţii:

P_3) a îl divide pe a

P_4) Dacă a îl divide pe b atunci a îl divide pe $m \cdot b$

P_5) Dacă a divide şi pe b şi pe c, atunci a divide şi pe $b+c$ şi pe $b-c$.

Şi acum soluţia problemei:

Pentru ca numărul $\dfrac{9n+17}{2n+1}$ să fie natural trebuie ca $2n+1$ să dividă pe $9n+17$ (vezi P_2) . Problema este că nu cunosc divizorii lui $9n+17$. Ar fi mult mai bine dacă nu l-am avea pe n. Îl vom elimina pe n folosind proprietatea P_5. Pentru aceasta avem nevoie de încă o relaţie de divizibilitate pe care ne-o asigură proprietatea P3 şi anume $2n+1$ divide pe $2n+1$.

Avem aşadar

$$2n+1 \text{ divide } 9n+17$$
$$2n+1 \text{ divide } 2n+1$$

Din aceste două relaţii, prin adunare sau scădere trebuie să obţinem că $2n+1$ divide un număr care nu-l mai conţine pe n. Pentru aceasta ar trebui ca în cele două afirmaţii de mai sus, în dreapta să apară acelaşi număr de n-uri. În acest scop pe $9n+17$ îl înmulţim cu 2, iar pe $2n+1$ îl înmulţim cu 9 pentru a ajunge la cel mai mic multiplu comun între 9 şi 2 (ne dă voie P_4).

Obţinem astfel

$$2n+1 \text{ divide } 18n+34$$
$$2n+1 \text{ divide } 18n+9$$

Din P_5 avem că $2n+1$ divide diferenţa celor două numere, adică

$$2n+1 \text{ divide pe } 25$$

Cum divizorii lui 25 sunt 1, 5 şi 25 deducem $2n+1=1$ sau $2n+1=5$ sau $2n+1=25$ de unde rezultă $n=0$ sau $n=2$ sau $n=12$.

În concluzie, dacă $n \in \{0,2,12\}$ atunci numărul $\dfrac{9n+17}{2n+1}$ este natural.

Problema 3: Arătaţi că fracţia $\dfrac{4n+9}{3n+7}$ este ireductibilă.

Soluţie: Se ştie că o fracţie ireductibilă este o fracţie care nu se mai poate simplifica. Se mai ştie că simplificarea se face totdeauna printr-un divizor comun al numărătorului şi numitorului.

În concluzie, pentru a arăta că fracţia dată este ireductibilă, trebuie să arătăm că cel mai mare divizor comun între numărător şi numitor este 1 (numărătorul şi numitorul sunt prime între ele).

Fie d un divizor comun al numărătorului şi numitorului. Atunci

$$d \text{ divide } 3n+7$$
$$d \text{ divide } 4n+9$$

Procedând ca la problema 2 avem

$$d \text{ divide } 12n+28$$
$$d \text{ divide } 12n+27$$

(am folosit P_4)

De aici obţinem, pe baza lui P_5 că,

$$d \text{ divide pe } 1$$

Aşadar fracţia dată este ireductibilă.

Problema 4: Arătaţi că fracţia $\dfrac{30k+11}{42k+19}$ este ireductibilă, pentru orice k număr natural.

Soluţie: Fie d un divizor comun al numărătorului şi numitorului. Din

$$d \text{ divide } 30k+11$$
$$d \text{ divide } 42k+19$$

obţinem

$$d \text{ divide } 5\cdot(42k+19) - 7\cdot(30k+11)$$

adică

$$d \text{ divide } 18$$

Divizorii naturali ai lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9, 18 şi atunci

$$d \in \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$$

Fracţia nu poate fi simplificată prin 2 pentru că numărătorul şi numitorul sunt numere impare. Atunci nu poate fi simplificată nici prin 6 şi nici prin 18.

Deoarece 30 şi 42 sunt multiplii de 3, iar 11 şi 19 nu se divid cu 3 rezultă că fracţia nu poate fi simplificată prin 3, deci nici prin 9.

În concluzie, $d = 1$, aşadar fracţia este ireductibilă.

Problema 5: Se dau numerele raţionale pozitive a, b, c cu proprietăţile:

$$\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4} \quad \text{şi} \quad 15a - 4b + 5c = 4.$$

Să se arate că are loc inegalitatea: $\frac{4}{3} < 3a - 3b + 5c < \frac{7}{5}$.

GMB 6/2011

Soluţie. Notăam $\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4} = k$ şi obţinem $a = \frac{2k}{3}$, $b = \frac{3k}{4}$ şi $c = \frac{4k}{5}$.

Înlocuind în cea de-a doua ecuaţie obţinem $11k = 4$, deci $k = \frac{4}{11}$.

Rezultă $a = \frac{8}{33}$, $b = \frac{3}{11}$, $c = \frac{16}{55}$.

Avem $3a - 3b + 5c = 3 \cdot \frac{8}{33} - 3 \cdot \frac{3}{11} + 5 \cdot \frac{16}{55} = \frac{8 - 9 + 16}{11} = \frac{15}{11}$. Inegalitatea cerută devine $\frac{4}{3} < \frac{15}{11} < \frac{7}{5}$, adică $220 < 225 < 231$, adevărat.

Problema 6: Determinaţi numerele $\overline{abc}$ ştiind că cifrele sale sunt numere prime şi $\frac{3a + 2b}{6} = \frac{3b + c}{7} = \frac{a + 4c}{11}$.

GMB 5/2012

Soluţie. Din $\frac{3a + 2b}{6} = \frac{3b + c}{7}$ obţinem $21a = 2(2b + 3c)$, de unde deducem că $2 \mid 21a$. Cum $(21, 2) = 1$ rezultă $2 \mid a$. Dar a este număr prim, deci $a = 2$. Din $\frac{3a + 2b}{6} = \frac{a + 4c}{11}$ şi $a = 2$ obţinem $11b = 3(4c - 9)$, de unde deducem că $3 \mid 11b$. Cum $(3, 11) = 1$ rezultă $3 \mid b$ şi cum b este număr prim obţinem $b = 3$. Revenind la relaţia $21a = 2(2b + 3c)$ găsim $c = 5$. Numărul căutat este 235.