Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a IX-a

Problema 1. Să se demonstreze că un triunghi ABC este isoscel dacă şi numai dacă

$$A'B + B'C + C'A = A'C + B'A + C'B,$$

unde A', B' şi C' sunt picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, respectiv C.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

Soluţie. Este clar că dacă triunghiul este isoscel relaţia din enunţ este satisfăcută.

Demonstrăm implicaţia inversă. Notăm cu a, b şi c lungimile laturilor BC, CA şi AB. Aplicând unghiului $\angle BAC$ teorema bisectoarei, obţinem

$$A'B = \frac{ac}{b+c} \text{ şi } A'C = \frac{ab}{b+c}.$$

Relaţii analoage se obţin şi pentru celelalte segmente.

Relaţia din enunţ devine:

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0.$$

Deoarece $c - a = (c-b) + (b-a)$, egalitatea devine:

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-b)}{c+a} + \frac{b(b-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0,$$

echivalentă cu

$$(b-c)\frac{(a-b)(a+b+c)}{(a+c)(b+c)} + (a-b)\frac{(c-b)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} = 0.$$

În final se obţine:

$$\frac{(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b)} = 0,$$

de unde rezultă că triunghiul isoscel.

Problema 2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relaţia

$$f(n+1) = f(f(n)) + 1,$$

pentru orice număr natural nenul n.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Vom arăta că singura funcţie care verfică relaţia din enunţ este $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că $f(1) = 1$, după care se poate demonstra prin inducţie după n.

Notăm cu $B \subset \mathbb{N}^*$ imaginea funcţiei f, care este evident nevidă. Există atunci un cel mai mic element (notat cu β) al lui B.

Să observăm mai întâi că $f(1) = \beta$. Într-adevăr, dacă $f(1) \neq \beta$, va exista un număr natural $\alpha > 1$ astfel încât $f(\alpha) = \beta$. Din relaţia din enunţ, rezultă $f(f(\alpha - 1)) = f(\alpha) - 1 = \beta - 1 \in B$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui β.

Este clar că mulţimea B conţine şi alte elemente în afară de β, altfel ar rezulta că $\beta = \beta + 1$.

Fie γ cel mai mic element al mulţimii $B \setminus \{\beta\}$. Ca mai sus, există un număr natural $\theta > 1$ astfel încât $f(\theta) = \gamma$.

Din nou, din relaţia din enunţ, avem că $f(f(\theta-1)) = f(\theta)-1 = \gamma-1 \in B$. Cum β este singurul element din B mai mic decât γ, rezultă că $\gamma - 1 = \beta$.

Am obţinut astfel că $f(f(\theta - 1)) = \beta = f(1)$, şi deci $f(\theta - 1) = 1$ (singurul număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) = \beta$ este $n = 1$). Obţinem astfel că $1 \in B$ şi deci cel mai mic element al lui B este $\beta = 1$, de unde rezultă că $f(1) = 1$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi scalen ascuţitunghic, având ortocentrul H şi cercul circumscris Γ. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$. Fie F al doilea punct de intersecţie a dreptei AH cu cercul Γ. Fie E punctul de intersecţie a dreptei HM cu cercul Γ astfel încât punctul H se află între punctele M şi E. Notăm cu N punctul de intersecţie a dreptei EF cu dreapta BC. Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle BHN$ şi $\sphericalangle MHC$ sunt congruente.

Mircea Fianu

Soluţie. Fie O centrul cercului Γ şi T al doilea punct de intersecţie a dreptei HM cu cercul Γ.

Se ştie că $AH = 2OM = BC\,\mathrm{ctg}A$. Cum $AH \parallel OM$, MO va fi linie mijlocie în triunghiul THA. Obţinem astfel că $HBTC$ este paralelogram.

Nu e greu de văzut că avem următoarele două congruenţe de unghiuri:

$$\angle CHT \equiv \angle HTB \text{ şi } \angle BHN \equiv \angle BFE.$$

Cum unghiurile $\angle BFE$ şi $\angle BTH$ subîntind arcul $\widehat{BE}$, se obţine congruenţa din enunţ.