Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} \left[\sqrt{[x]}\right] = \sqrt{[\sqrt{y}]} \\ \left[\sqrt{[y]}\right] = \sqrt{[\sqrt{z}]} \\ \left[\sqrt{[z]}\right] = \sqrt{[\sqrt{x}]} \end{cases},$$

unde $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a numărului real α.

Dana Heuberger

Soluţie. Fie $k, n, p \in \mathbb{Z}$, cu $\left[\sqrt{[x]}\right] = \sqrt{[\sqrt{y}]} = k$, $\left[\sqrt{[y]}\right] = \sqrt{[\sqrt{z}]} = n$ şi $\left[\sqrt{[z]}\right] = \sqrt{[\sqrt{x}]} = p$. Obţinem $[\sqrt{x}] = p^2$, $[\sqrt{y}] = k^2$ şi $[\sqrt{z}] = n^2$.

Din $p^2 \leqslant \sqrt{x}$ rezultă că $p^4 \leqslant x$, deci $p^4 \leqslant [x]$. Aşadar $p^2 \leqslant \sqrt{[x]}$, de unde obţinem că $p^2 \leqslant \left[\sqrt{[x]}\right] = k$. Analog deducem $k^2 \leqslant n$ şi $n^2 \leqslant p$.

În consecinţă, rezultă: $\quad k \geqslant p^2 \geqslant n^4 \geqslant k^8. \qquad (1)$

Deoarece $k \geqslant k^8$, obţinem $k \in \{0, 1\}$.

I. Dacă avem $k = 0$, din (1) rezultă $n = p = 0$, deci $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}] = [\sqrt{z}] = 0$. Obţinem $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \in [0, 1)$, aşadar tripletele (x, y, z), cu $x, y, z \in [0, 1)$, sunt soluţii ale sistemului.

II. Dacă avem $k = 1$, din (1) rezultă $n = p = 1$, deci $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}] = [\sqrt{z}] = 1$. Obţinem $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \in [1, 2)$, aşadar tripletele (x, y, z), cu $x, y, z \in [1, 4)$, sunt soluţii ale sistemului.

Mulţimea soluţiilor sistemului este:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1)\right\} \cup \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [1, 4)\right\}.$$