

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL OARECARE

ABSTRACT. Articolul prezintă teorema lui Pitagora generalizată, teorema lui Stewart, iar de aici lungimea medianei și lungimea bisectoarei într-un triunghi.

Lecția se adresează elevilor din clasa a VII-a.

Data: martie 2010

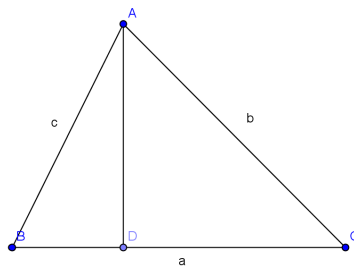
Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Toți cunoaștem teorema lui Pitagora și este clar pentru toată lumea că ea se aplică într-un triunghi dreptunghic.

În cele ce urmează vom arăta că o relație asemănătoare cu cea din teorema lui Pitagora putem stabili și într-un triunghi oarecare. Această relație va deveni teorema lui Pitagora generalizată.

Pentru a ușura scrierea vom folosi următoarele notații.

Dacă ABC este un triunghi, atunci $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.



Dacă $AD \perp BC$, atunci $BD = pr_{ac}$ reprezintă proiecția laturii AB pe dreapta BC , iar $CD = pr_{ab}$ reprezintă proiecția laturii AC pe dreapta BC .

Acestea fiind spuse putem formula acum următoarea

Teoremă (Pitagora generalizată): Dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic, atunci, cu notațiile de mai sus avem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot pr_{ac}$$

Demonstrație: Vom folosi figura de mai sus. Construind înălțimea AD în triunghiul ABC obținem două triunghiuri dreptunghice; ADC și ADB .

Din $\triangle ADC$ ($m(\hat{D}) = 90^0$) avem

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 \quad (*)$$

Din $\triangle ADB$ ($m(\hat{D}) = 90^0$) obținem

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

Înlocuind în (*) rezultă

$$AC^2 = DC^2 + AB^2 - BD^2 (**)$$

Dacă avem în vedere că $DC = BC - BD$, relația (**) devine

$$AC^2 = (BC - BD)^2 + AB^2 - BD^2$$

care, în urma efectuării calculelor conduce la

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot BD$$

iar cu notațiile anunțate mai sus obținem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot pr_{ac}$$

Observația 1: Relația din teorema lui Pitagora generalizată este circulară, adică poate fi scrisă pentru oricare dintre laturi. Avem așadar,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot pr_{bc}$$

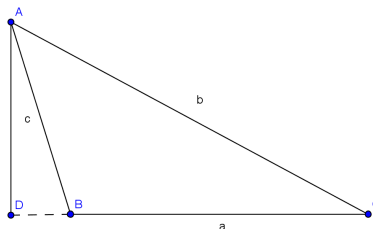
și

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot pr_{ab}$$

Observația 2: Dacă latura pentru care vrem să aplicăm teorema lui Pitagora generalizată se opune unui unghi obtuz atunci relația devine

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot pr_{ac}$$

deoarece, în acest caz $DC = BC + BD$.
(vezi figura de mai jos)



Teorema demonstrată mai sus ne permite să abordăm acum

Teorema lui Stewart: Fie A, C, B puncte coliniare, în această ordine, iar O un punct exterior dreptei AB . Atunci este adevărată relația

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC - OC^2 \cdot AB = AC \cdot CB \cdot AB$$

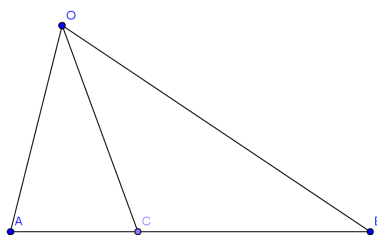
Demonstrație: Vom demonstra folosind teorema lui Pitagora generalizată în $\triangle OAC$ și $\triangle OCB$ (vezi figura de mai jos).

Din $\triangle OAC$ avem

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2 \cdot AC \cdot pr_{AC}OC, (*)$$

iar din $\triangle OBC$ avem

$$OB^2 = BC^2 + OC^2 + 2 \cdot BC \cdot pr_{BC}OC. (**)$$



Înmulțind relația (*) cu CB , relația (**) cu AC și având în vedere că $pr_{AC}OC = pr_{BC}OC = pr_{AB}OC$ putem scrie

$$\begin{aligned} OA^2 \cdot CB &= AC^2 \cdot CB + OC^2 \cdot CB - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot pr_{AB}OC \\ OB^2 \cdot AC &= BC^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AC + 2 \cdot AC \cdot BC \cdot pr_{AB}OC \end{aligned}$$

Adunând, membru cu membru, cele două relații obținem

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC^2 \cdot CB + BC^2 \cdot AC + OC^2 \cdot CB + OC^2 \cdot AC$$

de unde

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC \cdot CB \cdot (AC + BC) + OC^2 \cdot (CB + AC)$$

Deoarece $AC + BC = AB$, ultima relație se scrie

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC \cdot CB \cdot AB + OC^2 \cdot AB$$

sau

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC - OC^2 \cdot AB = AC \cdot CB \cdot AB,$$

adică relația din enunț.

Această teoremă ne permite acum să aflăm, în funcție de lungimile laturilor, atât lungimea medianei într-un triunghi cât și lungimea bisectoarei într-un triunghi.

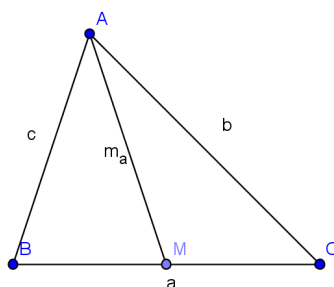
Problema 1 (Teorema medianei): În triunghiul ABC notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ și m_a lungimea medianei din A a triunghiului ABC . Atunci este adevărată relația

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Soluție: Vom aplica teorema lui Stewart pentru punctele coliniare B, M, C și punctul exterior A .

Avem

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC.$$



Folosind notațiile din enunț și faptul că $BM = MC = \frac{a}{2}$ vom putea scrie

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - m_a^2 \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a.$$

Înmulțind relația cu $\frac{4}{a}$ obținem

$$2c^2 + 2b^2 - 4m_a^2 = a^2$$

de unde rezultă relația din enunț

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Comentariu: Relații asemănătoare se pot scrie și pentru medianele din B sau C . Așadar

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

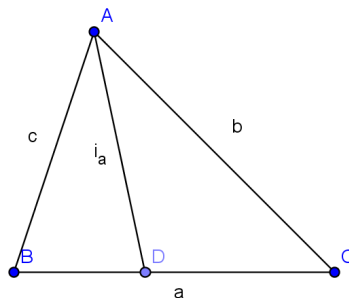
$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Problema 2 (Lungimea bisectoarei): În triunghiul ABC notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ și i_a lungimea bisectoarei unghiului A a triunghiului ABC . Atunci este adevărată relația

$$i_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

Soluție: Înainte de a începe demonstrația propriu-zisă să ne amintim teorema bisectoarei.

"Dacă AD este bisectoare în triunghiul ABC , $D \in (BC)$, atunci este adevărată relația $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ".



Folosind notațiile din problemă avem

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b},$$

de unde vom scoate $DB = \frac{ac}{b+c}$ și $DC = \frac{ab}{b+c}$.

Aplicăm acum teorema lui Stewart pentru punctele coliniare B, D, C și punctul exterior A . Vom avea

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BD \cdot DC \cdot BC.$$

Cu notațiile din enunț și calculele făcute mai sus avem

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - i_a^2 \cdot a = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a$$

Înmulțind relația cu $\frac{(b+c)^2}{a}$ obținem

$$c^2 b(b+c) + b^2 c(b+c) - i_a^2 (b+c)^2 = a^2 bc.$$

De aici putem scrie

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc(b+c)^2 - a^2 bc$$

sau

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc [(b+c)^2 - a^2].$$

În continuare avem

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc(b+c+a)(b+c-a).$$

Deoarece $p = \frac{a+b+c}{2}$ deducem $a+b+c = 2p$ și $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$.

Cu acestea, ultima relație devine

$$i_a^2(b+c)^2 = 4bcp(p-a),$$

de unde

$$i_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

adică relația din enunț.

Comentariu: Relații asemănătoare se pot scrie și pentru bisectoarele unghiurilor B sau C . Așadar

$$i_b^2 = \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}$$
$$i_c^2 = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$$