Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a XI-a

Problema 2. Fie a un număr real și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, f' este derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, iar f'' are limite laterale finite în punctul a.

Arătați că există o funcție $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, și numerele reale m și n astfel încât

$$f(x) = g(x) + (mx+n)|x-a|, \text{ oricare ar fi numărul real } x.$$

Soluție. Avem $g(x) = f(x) - (mx+n)(x-a)$ pentru $x \in [a,\infty)$ şi $g(x) = f(x) + (mx+n)(x-a)$ pentru $x \in (-\infty,a]$ **1p**

Rezultă că g este derivabilă și $g'(x) = f'(x) - \operatorname{sgn}(x-a)(2mx - am + n)$ pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $g'_s(a) = f'(a) + ma + n$ şi $g'_d(a) = f'(a) - ma - n$, iar pentru ca g să fie derivabilă în a este necesar și suficient ca $ma + n = 0$ **3p**

Apoi g' este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $g''_s(a) = f''_s(a) + 2m$ și $g''_d(a) = f''_d(a) - 2m$, iar pentru ca g să fie de două ori derivabilă în a este necesar și suficient ca $4m = f''_d(a) - f''_s(a)$ **2p**

Astfel, pentru $m = \frac{f''_d(a) - f''_s(a)}{4}$ și $n = -ma$ obținem funcția cerută **1p**