Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a XI-a

Problema 3. Fie m,n două numere naturale nenule. Determinați toate perechile (A,B) de matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care au proprietatea

$$AXB = X, \text{ oricare ar fi } X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Soluție. Fie $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$, $X = \left(x_{jk}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ și $B = \left(b_{kl}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$. Atunci avem $AXB = \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}x_{jk}b_{kl}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ **1p**

Alegem $x_{jk} = 1$ pentru $j = j_0$, $k = k_0$ și $x_{jk} = 0$ în caz contrar. Din $AXB = X$ reiese $a_{j_0j_0}b_{k_0k_0} = 1$ şi $a_{ij_0}b_{k_0l} = 0$ pentru $i \in \overline{1,m} \setminus \{j_0\}$ sau $l \in \overline{1,n} \setminus \{k_0\}$.................. **3p**

Cum $j_0 \in \overline{1,m}$ şi $k_0 \in \overline{1,n}$ au fost alese arbitrar, obţinem $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{mm} = a$, $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = b$, cu $ab = 1$ şi $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, $b_{kl} = 0$ pentru $k \neq l$, adică $A = aI_m$, $B = bI_n$ **2p**

Evident, $A = aI_m$, $B = bI_n$, cu $a,b \in \mathbb{R}$, $ab = 1$ convin **1p**