PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII

ABSTRACT. Articolul prezintă o modalitate de numărare folosind operaţiile cu mulţimi şi cardinalul unei mulţimi finite.

Lecţia se adresează clasei a VI-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala gimnazială nr. 96, Bucureşti

În cele ce urmează toate mulţimile cu care vom opera sunt mulţimi finite sau altfel spus mulţimi cu un număr finit de elemente. În acest context vom fi preocupaţi de aflarea numărului de elemente al reuniunii a două sau trei mulţimi.

Definiţie Numim cardinal al unei mulţimi numărul de elemente al mulţimii.

Cardinalul unei mulţimi se notază $cardA$ sau $|A|$.

Exemplu Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$, atunci $cardA$=5, deoarece mulţimea A are 5 elemente.

Să remarcăm următorul fapt evident:

Observaţia 1

Dacă A şi B sunt două mulţimi disjuncte ($A \cap B = \emptyset$), atunci

$$card(A \cup B) = cardA + cardB.$$

Ne interesează acum $cardA \cup B$ în cazul în care mulţimile nu sunt disjuncte ($A \cap B \neq \emptyset$)

Pentru început vom mai face câteva observaţii.

Observaţia 2

Pentru două mulţimi A şi B sunt adevărate afirmaţiile:

$$1.\ A - B = A - (A \cap B)$$
$$2.\ card(A - B) = cardA - card(A \cap B)$$

Faptul că afirmaţiile de mai sus sunt adevărate rezultă imediat din Figura 1. Când scriem diferenţa dintre mulţimile A şi B, din mulţimea B ne interesează numai elementele care se găsesc şi în mulţimea A, adică elementele comune lui A şi B.

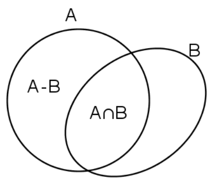

Figura 1

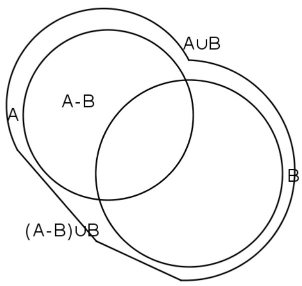

Figura 2

Figura 2 ne arată că reuniunea mulţimilor A şi B o putem privi şi ca reuniune între mulţimile $A-B$ şi B. Practic înseamnă că atunci când scriem reuniunea a două mulţimi vom scrie mai întâi elementele uneia dintre mulţimi (în cazul nostru B) apoi elementele din cealaltă mulţime care nu se găsesc în mulţimea pe care deja am scris-o (în cazul nostru $A-B$). Acest lucru ne permite să formulăm

Observaţia 3
Dacă A şi B sunt două mulţimi finite, atunci

$$A \cup B = (A-B) \cup B$$

Teorema 1 Dacă A şi B sunt două mulţimi finite, atunci

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

(Principiul includerii şi excluderii pentru două mulţimi)

Demonstraţie: Afirmaţia din enunţul teoremei este evidentă dacă avem în vedere că reuniunea a două mulţimi înseamnă " să scriem împreună elementele celor două mulţimi, având grijă ca elementele comune să nu se repete." Adunând cardinalele celor două mulţimi este evident că numărul elementelor comune (din $A \cap B$) au fost adunate de două ori, deci va trebui să le scădem.

Să încercăm acum o demonstraţie mai riguroasă. Din Observaţia 3 putem scrie:

$$card(A \cup B) = card((A - B) \cup B) \ (1)$$

Cum mulţimile $A - B$ şi B sunt disjuncte, din Observaţia 1 avem:

$$card((A - B) \cup B) = card(A - B) + cardB \ (2)$$

Cu aceasta relaţia (1) devine:

$$card(A \cup B) = card(A - B) + cardB \ (3)$$

Acum, datorită punctului 2 din Observaţia 2, relaţia (3) devine:

$$card(A \cup B) = cardA - card(A \cap B) + cardB$$

şi teorema este demonstrată.

O teoremă asemănătoare se poate demonstra şi pentru trei sau mai multe mulţimi finite. Ne vom limita la a demonstra teorema în cazul a trei mulţimi.

Înainte de aceasta să reţinem:

Observaţia 4
Dacă A, B şi C sunt trei mulţimi atunci

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Această observaţie poat fi uşor verificată pe un exemplu.

Teorema 2
Dacă A, B şi C sunt trei mulţimi finite, atunci

$$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

(Principiul includerii şi excluderii pentru trei mulţimi)

Demonstraţie Avem succesiv: $card(A \cup B \cup C) = card((A \cup B) \cup C) = card(A \cup B) + cardC - card((A \cup B) \cap C) = cardA + cardB - card(A \cap B) + cardC - card((A \cap C) \cup (B \cap C)) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - (card(A \cap C) + card(B \cap C) - card(A \cap C \cap B \cap C)) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$.

Aşadar, teorema este demonstrată.

Acum să încercăm să rezolvăm două probleme folosind principiul includerii şi excluderii:

Problema 1

Într-o clasă 18 elevi vorbesc limba germană, 15 elevi vorbesc limba franceză, iar 7 elevi vorbesc şi limba germană şi limba franceză. Câţi elevi sunt în clasă?

Soluţie: Vom nota cu A mulţimea elevilor care vorbesc limba germană, iar cu B mulţimea elevilor care vorbesc limba franceză. Atunci mulţimea elevilor care vorbesc ambele limbi va fi $A \cap B$, iar mulţimea elevilor din clasă este reprezentată de $A \cup B$.

Cu aceste notaţii, numărul elevilor din clasă este $card(A \cup B)$ şi având în vedere Teorema 1 vom scrie:

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

Dar $cardA = 18$ (18 elevi vorbesc limba germană), $cardB = 15$ (15 elevi vorbesc limba franceză) şi $card(A \cap B) = 7$ (7 elevi vorbesc şi limba germană şi limba franceză)

Cu acestea rezultă

$$card(A \cup B) = 18 + 15 - 7 = 26$$

În concluzie, în clasă sunt 26 de elevi.

Problema 2

Într-o clasă cu 24 de elevi 10 elevi joacă fotbal, 12 elevi joacă baschet, iar 8 elevi joacă volei. Se ştie că 2 elevi joacă şi fotbal şi baschet, 3 elevi joacă şi baschet şi volei, iar 2 elevi joacă şi fotbal şi volei. Arătaţi că există cel puţin un elev care joacă şi fotbal şi baschet şi volei.

Soluţie: Vom nota A mulţimea elevilor care joacă fotbal, B mulţimea elevilor care joacă baschet şi C mulţimea elevilor care joacă volei. Atunci mulţimea elevilor din clasă înseamnă $A \cup B \cup C$, mulţimea elevilor care joacă şi fotbal şi baschet va fi $A \cap B$, mulţimea elevilor care joacă şi baschet şi volei va fi $B \cap C$, iar mulţimea elevilor care joacă şi fotbal şi volei va fi

$A \cap C$. În sfârşit, mulţimea elevilor care joacă şi fotbal şi baschet şi volei va fi reprezentată de $A \cap B \cap C$.

Din Teorema 2 avem:

$$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C) \ (1)$$

Dar $card(A \cup B \cup C) = 24$, $cardA = 10$, $cardB = 12$, $cardC = 8$, $card(A \cap B) = 2$, $card(B \cap C) = 3$ şi $card(A \cup C) = 2$.

Înlocuind în (1) avem:

$$24 = 10 + 12 + 8 - 2 - 3 - 2 + card(A \cap B \cap C)$$

de unde rezultă

$$card(A \cap B \cap C) = 1$$

ceea ce ne arată că există un elev care joacă şi fotbal şi baschet şi volei.