PROBLEME REZOLVATE DIN GAZETA MATEMATICĂ

ABSTRACT. Materialul conţine câteva probleme rezolvate apărute în Gazeta Matematică.

Lecţia se adresează clasei a IV-a

Data: 20 decembrie 2010

Autor: Ion Cicu, Şcoala nr.96, Bucureşti

Problema 1. La împărţirea a două numere naturale câtul este cu 7 mai mare decât împărţitorul, iar restul o pătrime din cât. Aflaţi cele două numere naturale, ştiind că împărţitorul, câtul şi restul fac împreună 38.

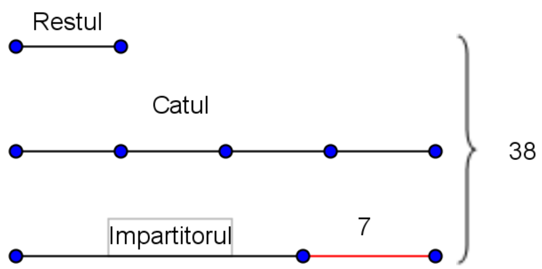
G.M.5/2010

Soluţie. Vom folosi metoda figurativă.

Pentru că restul este o pătrime din cât am reprezentat mai întâi restul şi apoi câtul, printr-un segment de patru ori mai mare.

Deoarece câtul este cu 7 mai mare decât împărţitorul am reprezentat împărţitorul cu 7 mai mic decât câtul.

Toate acestea se văd în desenul de mai jos.



Se observă că dacă la împărţitor adăugăm 7 vom obţine un segment la fel de mare cum este câtul, aşadar 9 segmente egale cu restul.

Dacă 9 resturi înseamnă 45 ($38 + 7 = 45$), atunci restul va fi

$$45 : 9 = 5$$

Atunci câtul va fi

$$5 \times 4 = 20$$

iar împărţitorul

$$20 - 7 = 13$$

Cu aceasta deîmpărţitul va fi

$$20 \times 13 + 5 = 265$$

În concluzie, cele două numere sunt 265 şi 13.

Problema 2. Găsiţi toate numerele pare de forma $\overline{abcd}$, cu cifre distincte, ştiind că cifra miilor este produsul celorlalte trei cifre.

G.M.2/2010

Soluţie. Din enunţ trebuie să avem

$$a = b \times c \times d$$

De aici este evident că toate cifrele sunt diferite de cifra 0.

De asemenea $b \times c \times d \leq 9$ (Să nu uităm că a este cifră)

Dacă numărul $\overline{abcd}$ este par, atunci cifra d poate fi: 2, 4, 6 sau 8.

Dacă $d = 2$ atunci b şi c sunt mai mici decât 5 ($2 \times 5 = 10$)

Pentru $b = 1$, c poate fi: 3 sau 4 şi atunci a este 6 sau 8. Obţinem numerele 6132 şi 8142.

Pentru $b = 3$ avem numai posibilitatea $c = 1$ şi atunci $a = 6$. Obţinem numărul 6312.

Pentru $b = 4$ avem numai $c = 1$ şi atunci $a = 8$. Obţinem numărul 8412.

Dacă $d = 4$ atunci b şi c sunt mai mici decât 3 ($3 \times 4 = 12$)

Pentru $b = 1$ avem numai $c = 2$ şi atunci $a = 8$. Obţinem numărul 8124.

Pentru $b = 2$ avem numai $c = 1$ şi atunci $a = 8$. Obţinem numărul 8214.

Dacă $d = 6$ sau $d = 8$ atunci b şi c sunt mai mici decât 1. Cum nu mai avem la dispoziţie decât o cifră rezultă că aceste situaţii nu sunt posibile.

În concluzie, numerele sunt: 6132, 8142, 6312, 8412, 8124, 8214.

Problema 3. Aflaţi numărul natural $\overline{ab}$, ştiind că are loc egalitatea: $a + \overline{bab} + \overline{bba} + \overline{aba} = \overline{abba}$

G.M.2/2010

Soluţie. Folosind scrierea unui număr ca o sumă de produse avem

$$a + b \times 100 + a \times 10 + b + b \times 100 + b \times 10 + a + a \times 100 + b \times 10 + a =$$

$$= a \times 1000 + b \times 100 + b \times 10 + a$$

Cu factorul comun avem

$$a \times (1+10+1+100+1) + b \times (100+1+100+10+10) = a \times (1000+1) + b \times (100+10)$$

de unde

$$a \times 113 + b \times 221 = a \times 1001 + b \times 110$$

De aici putem scrie

$$b \times 221 - b \times 110 = a \times 1001 - a \times 113$$

Folosind, din nou, factorul comun avem

$$b \times (221 - 110) = a \times (1001 - 113)$$

sau

$$b \times 111 = a \times 888$$

împărţind egalitatea prin 111 avem

$$b = 8 \times a$$

Deoarece a şi b sunt cifre, singura variantă posibilă este $a = 1$ şi $b = 8$.
În concluzie, numărul căutat este 18.

Problema 4. Fie numerele naturale $a = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2009$, $b = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2010$ şi $c = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2009$. Arătaţi că numerele a, $b + 1$ şi c împărţite la 2 dau acelaşi rest.

G.M.2/2010

Soluţie. Cel mai simplu este să calculăm cele trei sume şi apoi să facem împărţirea.

Calculăm suma $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2009$.

Sunt 2009 termeni. Lăsând de-o parte numărul 2009 rămânem cu 2008 termeni care se pot grupa câte doi în 1004 grupe. Vom grupa astfel: 1 cu 2008, 2 cu 2007, 3 cu 2006 şi aşa mai departe. În fiecare grupă suma este 2009. Atunci

$$a = 1004 \times 2009 + 2009 = 2019045$$

Comentariu. Suma $a = 1+2+3+\cdots+2007+2008+2009$ se poate calcula şi altfel.

Putem aşeza suma în două feluri, ca mai jos.

$$\begin{array}{ccccccc} a = & 1+ & 2+ & 3+ & \cdots & +2007 & +2008 & +2009 \\ a = & 2009+ & 2008+ & 2007+ & \cdots & +3 & +2 & +1 \end{array}$$

Observând că numerele aşezate unul sub altul au suma 2010 putem spune că de două ori a înseamnă de 2009 ori 2010.

Adică

$$2 \times a = 2009 \times 2010$$

de unde

$$a = 2009 \times 2010 : 2$$

În general,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \times (n + 1) : 2$$

Revenim la problemă şi calculăm b. Folosind factorul comun avem

$$b = 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 1005)$$

şi din comentariu de mai sus avem

$$b = 2 \times 1005 \times (1005 + 1) : 2 = 1011030$$

Pentru a calcula c să observăm că termenii lui c sunt numere impare. Dacă am fi avut şi numerele pare aveam chiar a. Această observaţie ne permite să-l scriem pe c astfel

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2008 + 2009 - (2 + 4 + \cdots 2008)$$

de unde

$$c = 2019045 - 1009020 = 1010025$$

Aşadar $a = 2019045$, $b = 1011030$, $c = 1010025$.
Atunci $a : 2$ dă câtul 1009522 şi restul 1.
$(b + 1) : 2$ dă câtul 505515 şi restul 1.

$c : 2$ dă câtul 505012 şi restul 1.

Adică a, $b+1$ şi c dau acelaşi rest la împărţirea la 2.

Problema 5. Dacă $3\times a+b=11$ şi $2\times b-c=8$, calculaţi $6\times a+8\times b-3\times c$.

G.M.1/2010

Soluţie. Avem relaţiile

$$3\times a+b=11 \quad (*)$$

$$2\times b-c=8 \quad (**)$$

din care trebuie să aflăm

$$6\times a+8\times b-3\times c \quad (***)$$

În relaţia $(***)$ avem $6\times a$, iar în relaţia $(*)$ avem $3\times a$. de asemenea, în relaţia $(***)$ avem $3\times c$, iar în relaţia $(**)$ avem numai c. Aceste observaţii ne îndeamnă să înmulţim relaţia $(*)$ cu 2 şi relaţia $(**)$ cu 3, apoi să le adunăm. Avem

$$6\times a+2\times b=22 \quad (****)$$

$$6\times b-3\times c=24 \quad (*****)$$

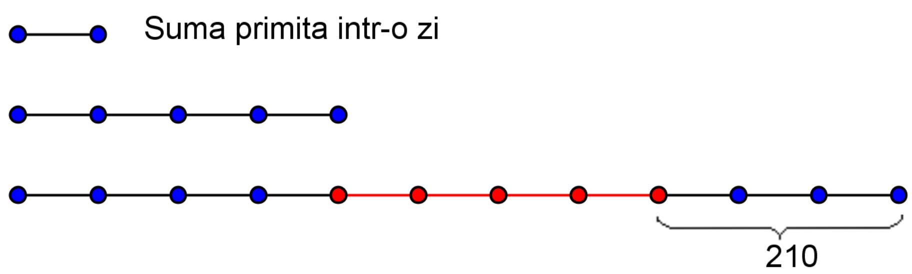
Adunând cele două relaţii şi ţinând cont de faptul că $2\times b+6\times b=8\times b$ obţinem

$$6\times a+8\times b-3\times c=46$$

Problema 6. Un muncitor lucrează 4 zile, iar altul lucreează 11 zile. Împărţind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obţinem restul 210. Ce sumă de bani a primit fiecare ştiind că pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani?

G.M.1/2010

Soluţie. Cheia problemei o reprezintă afirmaţia pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani. Dacă vom reprezenta suma primită pentru o zi printr-un segment, atunci problema poate fi figurată astfel



Se observă că suma primită de primul muncitor se reprezintă prin 4 segmente, iar suma primită de al doilea muncitor prin 11 segmente.

Afirmaţia împărţind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obţinem restul 210 o interpretăm pe desen astfel: trei segmente înseamnă 210.

Atunci, un segment, adică suma primită pentru o zi înseamnă

$$210 : 3 = 70 \ (lei)$$

De aici, primul muncitor primeşte

$$70 \times 4 = 280 \ (lei)$$

iar cel de-al doilea

$$70 \times 11 = 770 \ (lei)$$