Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a IX-a

Problema 3. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC, iar X, Y şi Z centrele cercurilor înscrise triunghiurilor BIC, CIA, respectiv AIB. Fie, de asemenea, M, N şi P centrele cercurilor înscrise triunghiurilor BXC, CYA, respectiv AZB.

a) Arătaţi că dacă perimetrele triunghiurilor AIB, BIC şi CIA sunt egale, atunci triunghiul ABC este echilateral.

b) Demonstraţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Soluţie:

a) Notăm cu $P(UVW)$ perimetrul uni triunghi UVW. Fie ABC un triunghi în care este verificată ipoteza. Dacă $A > B$, atunci $BC > AC$, iar

$$BI = \frac{r}{sin(B/2)} > \frac{r}{sin(A/2)} = AI$$

şi rezultă că $P(BIC) > P(CIA)$. **2p**

Prin contrapoziţie obţinem că ABC este echilateral. **1p**

b) Aplicăm varianta trigonometrică a teoremei lui Ceva. Avem astfel:

$$\frac{\sin(\widehat{BAM})}{\sin(\widehat{MAC})} \cdot \frac{\sin\left(\frac{7C}{8}\right)}{\sin\left(\frac{C}{8}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{B}{8}\right)}{\sin\left(\frac{7B}{8}\right)} = \frac{\sin(\widehat{BAM})}{\sin(\widehat{MAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACM})}{\sin(\widehat{MCB})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBM})}{\sin(\widehat{MBA})} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\sin(\widehat{ACP})}{\sin(\widehat{PCB})} \cdot \frac{\sin\left(\frac{7B}{8}\right)}{\sin\left(\frac{B}{8}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{8}\right)}{\sin\left(\frac{7A}{8}\right)} = \frac{\sin(\widehat{ACP})}{\sin(\widehat{PCB})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBP})}{\sin(\widehat{PBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{BAP})}{\sin(\widehat{PAC})} = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{\sin(\widehat{CBN})}{\sin(\widehat{NBA})} \cdot \frac{\sin\left(\frac{7A}{8}\right)}{\sin\left(\frac{A}{8}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{C}{8}\right)}{\sin\left(\frac{7C}{8}\right)} = \frac{\sin(\widehat{CBN})}{\sin(\widehat{NBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{BAN})}{\sin(\widehat{NAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACN})}{\sin(\widehat{NCB})} = 1 \qquad (3)$$

. . . . **2p**

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem

$$\frac{\sin(\widehat{BAM})}{\sin(\widehat{MAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACP})}{\sin(\widehat{PCB})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBN})}{\sin(\widehat{NBA})} = 1,$$

de unde rezultă că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente. **2p**