Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018
Clasa a XI-a

Problema 1. Fie A, B matrice de ordin 3, cu elemente numere reale, astfel încât $|\det(A + xB)| \leqslant 1$, pentru orice număr complex x de modul 1.

Arătați că $|\det A| \leqslant 1$.

Soluţie. Determinantul $\det(A+xB) := f(x)$ este o funcție polinomială de forma $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, cu $a = f(0) = \det A$. Observăm că

$$|4a| = |f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)| \leqslant 4,$$

de unde rezultă imediat concluzia.

Problema 2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale strict pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha > 1$. Arătați că șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ dat de $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{a_n}$ are o limită ℓ. Care este valoarea minimă a lui ℓ ?

Soluţie. Din ipoteză rezultă că șirul a_n este strict crescător de la un rang încolo, deci are o limită $\lambda > 0$. Dacă λ ar fi număr real, atunci am obține contradicția $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \neq \alpha$, deci $\lambda = +\infty$.

Fie $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}$. Avem

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \to \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}.$$

Din cele de mai sus reiese, conform teoremei Stolz-Cesaro, că șirul b_n are limita $\alpha^2/(\alpha - 1) \geqslant 4$.

Cum valoarea 4 se atinge pentru $\alpha = 2$ (obținută, de exemplu, pentru $(a_n)_{n\geqslant 1}$ progresie geometrică de rație 2), reiese că valoarea minimă a lui ℓ este 4.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcție continuă și $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir dat de $a_1 \in [0, 1]$, $a_{n+1} = f(a_n)$ pentru $n \geqslant 1$.

a) Arătați că, dacă $(a_{n+1} - a_n) \to 0$ și $\alpha < \beta$ sunt două puncte limită ale șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$, atunci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$.

b) Deduceți că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent dacă și numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Soluție. a) Fie $(a_{j_n})_{n\geqslant 1} \to \alpha$ un subșir al șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Atunci $a_{j_n+1} = f(a_{j_n}) \to f(\alpha)$, iar ipoteza $a_{j_n+1} - a_{j_n} \to 0$ duce la $f(\alpha) = \alpha$.

Analog, folosind un subșir $a_{k_n} \to \beta$, obținem $f(\beta) = \beta$. Să observăm și că putem alege indicii astfel încât $j_n < k_n < j_{n+1}$.

Fie acum $x \in (\alpha, \beta)$. Avem $a_{j_n} < x < a_{k_n}$ pentru $n \geqslant n_0$. Pentru fiecare $n \geqslant n_0$, fie i_n cel mai mic indice i pentru care $j_n \leqslant i < k_n$ și $a_i < x \leqslant a_{i+1}$ (există cel puțin un astfel de indice). Din $a_{i_n} \leqslant x < a_{i_n+1}$ și $a_{i_n+1} - a_{i_n} \to 0$ rezultă $a_{i_n} \to x$ și apoi, ca mai sus, $f(x) = x$.

b) Implicația „$\Rightarrow$” este evidentă.

Pentru reciprocă, raționăm prin reducere la absurd. Într-adevăr, dacă presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ are două puncte limită $\alpha < \beta$, atunci alegem $x \in (\alpha, \beta)$. Ca mai sus, deducem că există un subșir $a_{i_n} \to x$, deci există i astfel încât $a_i \in [\alpha, \beta]$. Dar atunci $a_n = a_i$ pentru $n \geqslant i$, deci $a_n \to a_i$ – contradicție.