Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VI-a

Problema 1.

Determinaţi numerele naturale n şi m astfel încât $[2^n, 2^n+3] + (m! + 1, 2^m \cdot 3) = 1123$.

Am notat $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$, $[x,y]$ este cel mai mic multiplu comun, iar (x,y) este cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Mihai Bunget, Tg. Jiu

Barem de notare: Dacă d este un divizor comun al numerelor 2^n şi $2^n + 3$, atunci d divide şi diferenţa lor, adică pe 3.

Dar d nu poate fi 3, deoarece 2^n nu este divizibil cu 3, deci $d = 1$, şi atunci obţinem $[2^n, 2^n+3] = 2^n \cdot (2^n + 3)$. **1p**

Pentru $m \geq 3$, numărul $m! + 1$ nu este divizibil cu 2 sau 3, deci este prim cu $2^m \cdot 3$, şi atunci deducem că $(m! + 1, 2^m \cdot 3) = 1$. **2p**

În acest caz obţinem relaţia $2^n \cdot (2^n + 3) + 1 = 1123$ sau $2^n \cdot (2^n + 3) = 2 \cdot 561$ care nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale. **1p**

Pentru $m = 0$ obţinem $2^n \cdot (2^n + 3) = 1122$, care nu are soluţii.

Pentru $m = 1$ obţinem $2^n \cdot (2^n + 3) = 1121$, care nu are soluţii.

Pentru $m = 2$ obţinem $2^n \cdot (2^n + 3) = 1120$ de unde $n = 5$. **3p**