PĂTRATE PERFECTE

ABSTRACT. Materialul se adresează în principal elevilor din clasele a V-a şi a VI-a şi reprezintă o colecţie de definiţii, proprietăţi, exemple, metode, exerciţii de transfer, ce au în comun noţiunea de pătrat perfect.

Lecţia se adresează claselor a V-a şi a VI-a

Autor: Gabriel Vrînceanu

Definiţie 1. Un număr natural se numeşte pătrat perfect dacă se poate scrie ca puterea a doua a unui număr natural.

Exemple 1. Numărul 9 este pătrat perfect deoarece se poate scrie 3^2.

Numărul 256 este pătrat perfect deoarece se poate scrie 16^2.

Exemplele pot continua; luăm orice număr natural n, calculăm n^2 şi astfel găsim un pătrat perfect.

Procedeul de mai sus prin care găsim pătrate perfecte ne permite să stabilim care este cifra unităţilor oricărui pătrat perfect. Putem construi următorul tablou

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

în care am notat u(n) cifra unităţilor lui ”n” şi $u(\mathrm{n}^2)$ cifra unităţilor lui ”n^2”.

Comentariu. Tabloul de mai sus ne arată că numai anumite cifre pot reprezenta cifra unităţilor unui pătrat perfect. Dar atenţie, dacă cifra unităţilor unui număr este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 nu înseamnă că acesta este sigur pătrat perfect.

Exemple 2. Numărul 16 este pătrat perfect ($4^2 = 16$), dar 26 nu este pătrat perfect, deşi are cifra unităţilor tot 6.

Tot din tabloul de mai sus deducem şi un alt fapt, de data aceasta cu siguranţă adevărat şi anume:

Teorema 1. *Un număr care are cifra unităţilor 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect.*

Exerciţiu 1. Arătaţi că numărele $a = 5n + 2$ şi $b = 5n + 3$ nu sunt pătrate perfecte.

Soluţie. Notăm $u(x)$ cifra unităţilor lui x.

Avem $u(5n)$ este 0 sau 5, de unde $u(5n+2)$ este 2 sau 7 şi în baza teoremei 1 rezultă că a nu este pătrat perfect.

La fel $u(5n+3)$ este 3 sau 8 şi deci nici b nu este pătrat perfect.

Comentariu. Din acest exerciţiu ar trebui reţinut că un pătrat perfect nu poate fi de forma $5n+2$ sau $5n+3$.

Definiţie 2. Numerele n^2 şi $(n+1)^2$ se numesc pătrate perfecte consecutive.

Cu această definiţie putem formula

Teorema 2. *Între două pătrate perfecte consecutive nu există niciun alt pătrat perfect.*

Consecinţă. Dacă numărul natural a are proprietatea că există n natural astfel încât $n^2 < a < (n+1)^2$, atunci a nu este pătrat perfect.

Exerciţiu 2. Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că $n(n+1)$ nu este pătrat perfect.

Soluţie. Este evident că

$$n < n+1 \ (*)$$

Înmulţim relaţia (*) cu n şi obţinem

$$n^2 < n(n+1) \ (**)$$

Înmulţim acum relaţia (*) cu $n+1$ şi obţinem

$$n(n+1) < (n+1)^2 \ (***).$$

Din (**) şi (***) rezultă

$$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$$

Deoarece $n(n+1)$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, în baza teoremei 2, rezultă că nu este pătrat perfect.

Comentariu. Să reţinem că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

Acum, întorcându-ne la definiţia pătratului perfect este evidentă următoarea

Teorema 3. *Orice putere cu exponent par este un pătrat perfect.*

Justificare. Fie puterea a^{2n}, adică o putere cu exponent par. Din proprietăţile puterilor putem scrie

$$a^{2n} = (a^n)^2$$

ceea ce arată că a^{2n} este pătrat perfect.

Comentariu. Atenţie! Dacă avem o putere cu exponent impar nu este sigur că aceasta nu este pătrat perfect.

De exemplu

$$49^3 = (7^2)^3 = 7^{2\cdot 3} = (7^3)^2$$

aşadar este pătrat perfect.

În legătură cu pătratele perfecte este util să reţinem următoarele rezultate:

Propoziţia 1. Produsul a două pătrate perfecte este un pătrat perfect.

Justificare. Fie a^2 şi b^2 cele două pătrate perfecte.
Avem

$$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$$

ceea ce justifică afirmaţia din enunţ.

Propoziţia 2. Suma a două pătrate perfecte poate să fie sau poate să nu fie pătrat perfect.

Justificare. Vom da două exemple.

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

adică suma a două patrate perfecte este pătrat perfect.

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

care arată că suma a două pătrate perfecte nu mai este pătrat perfect.

Propoziţia 3. Un număr prim nu este pătrat perfect.

Justificare. Să presupunem că numărul prim p este pătrat perfect. Atunci există un număr natural n astfel încât $p = n^2$ sau $p = n \cdot n$. Din ultima relaţie deducem că n este un divizor al lui p. Dar p era număr prim (are ca divizori numai pe 1 şi pe el însuşi). Înseamnă că presupunerea făcută este falsă. În concluzie, numerele prime nu sunt pătrate perfecte.

Propoziţia 4. Un număr natural descompus în factori primi este pătrat perfect dacă toţi factorii au exponenţi pari.

Justificare. Fie $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ (descompunerea în factori primi a lui A). Cum numerele prime nu sunt pătrate perfecte nu vom putea să ne aflăm în situaţia descrisă în **Comentariu** de la teorema 3. Aşadar, pentru ca A să fie pătrat perfect trebuie să avem toţi exponenţii numere pare (vezi Teorema 3).

Consecinţă. Dacă un număr prim p divide un pătrat perfect A, atunci p^2 îl divide pe A.

Comentariu. Consecinţa de mai sus ne ajută să demonstrăm că un număr nu este pătrat perfect.

Exerciţiu 3. Arătaţi că $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 20$ nu este pătrat perfect.

Soluţie. În produsul din enunţ apare factorul 19, deci n se divide cu 19. Dacă n ar fi pătrat perfect ar trebui să se dividă cu 19^2, dar acesta nu apare în produsul care dă numărul n. În concluzie n nu este pătrat perfect.

Propoziţia 5. Un pătrat perfect are un număr impar de divizori naturali.

Justificare. Dacă $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, atunci numărul divizorilor naturali ai lui A este $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\cdots(n_k+1)$.

Dacă A este pătrat perfect, atunci numerele n_1, n_2, n_3, $\cdots$ n_k sunt numere pare (vezi propoziţia 4). Rezultă de aici că fiecare paranteză din produsul $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\cdots(n_k+1)$ este un număr impar, aşadar tot produsul este par. În concluzie, numărul divizorilor lui A este impar.

Consecinţă. Dacă un număr natural are un număr par de divizori, atunci el nu este pătrat perfect.

Se mai pot spune multe lucruri legate de pătratele perfecte, dar acestea depăşesc nivelul clasei a VI-a. Ne vom opri aici, nu înainte de a prezenta, fără justificări, câteva rezultate utile în problemele cu pătrate perfecte.

Propoziţia 6. Nu există pătrate perfecte de forma $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 7. Nu există pătrate perfecte de forma $4k+2$ sau $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.