PROBLEME DE GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

ABSTRACT. Materialul conţine teorema lui Thales în spaţiu, o variantă a teoremei lui Menelaos în spaţiu, câteva probleme de puncte coplanare.

Lecţia se adresează clasei a VIII-a

Data: 20 decembrie 2010

Autor: Ion Cicu, Şcoala nr.96, Bucureşti

Sper că vă sunt bine cunoscute următoarele teoreme

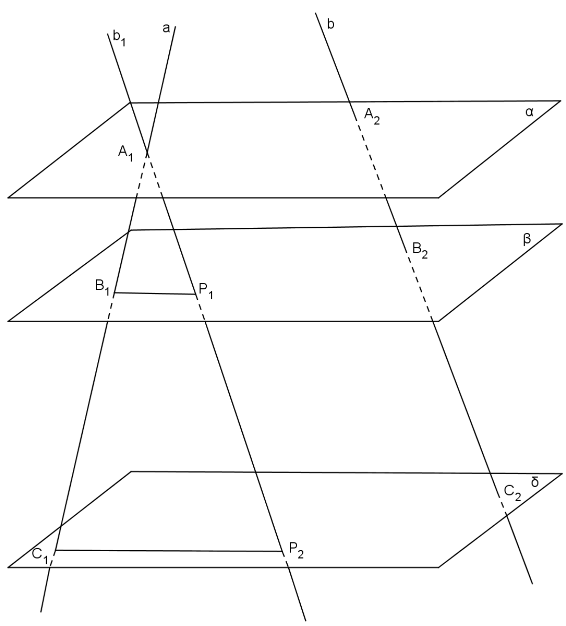
Teorema 1. Un plan intersectează două plane paralele după două drepte paralele.

Teorema 2. Două plane paralele determină pe două drepte paralele segmente congruente.

Cu ajutorul acestor două teoreme vom demonstra acum

Teorema 3. (Thales în spaţiu) Trei plane paralele determină pe două drepte care le intersectează segmente proporţionale.

Demonstraţie



Considerând planele $\alpha,\ \beta,\ \delta$ astfel încât $\alpha \parallel \beta \parallel \delta$ şi dreptele a şi b astfel încât

$$a \cap \alpha = \{A_1\},\ a \cap \beta = \{B_1\}\ a \cap \delta = \{C_1\}$$

şi

$$b \cap \alpha = \{A_2\},\ b \cap \beta = \{B_2\}\ b \cap \delta = \{C_2\}$$

trebuie să demonstrăm că

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

Construim prin A_1 o dreaptă $b_1 \parallel b$ care intersectează planul β în P_1 şi pe δ în P_2.

Deoarece $(a, b_1) \cap \beta = B_1P_1$, $(a, b_1) \cap \delta = C_1P_2$ şi $\beta \parallel \delta$ din Teorema 1 avem $B_1P_1 \parallel C_1P_2$.

Aplicând acum teorema lui Thales în triunghiul $A_1C_1P_2$ avem

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_1P_1}{P_1P_2} \quad (1)$$

Dar $\alpha \parallel \beta$ şi $b \parallel b_1$ şi cu Teorema 2 obţinem $[A_1P_1] \equiv [A_2B_2]$ (2).

Analog, din $\beta \parallel \delta$ şi $b \parallel b_1$ obţinem $[P_1P_2] \equiv [B_2C_2]$ (3).

Înlocuind (2) şi (3) în (1) obţinem

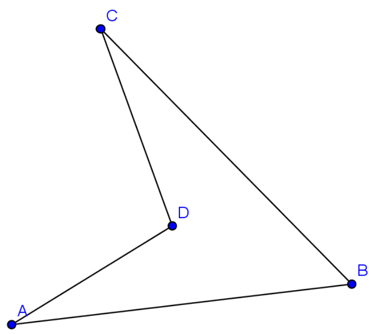
$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

şi teorema este demonstrată.

Pentru a exprima într-o formă mai scurtă teorema următoare vom introduce noţiunea de patrulater strâmb.

Definiţie Numim patrulater strâmb patru puncte necoplanare luate într-o anumită ordine.

În figura de mai jos $ABCD$ este un patrulater strâmb.

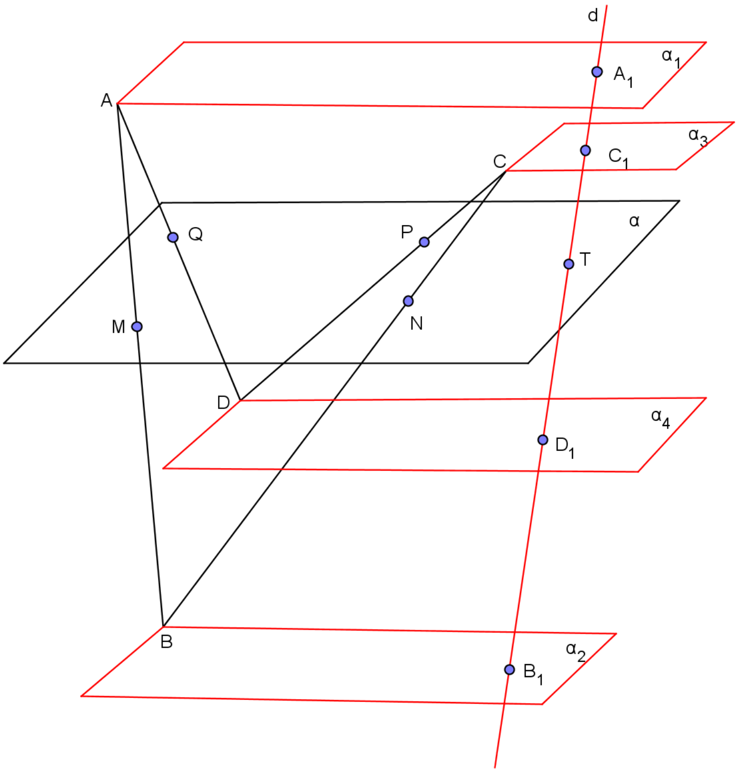


Teorema 4. Dacă un plan α intersectează laturile unui patrulater strâmb în punctele $M \in AB,\ N \in BC,\ P \in CD$ şi $Q \in DA$, atunci

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$$

Demonstraţie Vom folosi teorema lui Thales în spaţiu exprimând toate cele patru rapoarte prin rapoarte situate pe o aceeaşi dreaptă.

În figura de mai jos avem planul α care intersectează laturile patrulaterului strâmb $ABCD$, dar şi dreapta d pe care vom muta rapoarele. De asemenea, prin punctele A, B, C respectiv D construim planele α_1, α_2, α_3 respectiv α_4 paralele cu planul α şi care se intersectează cu d în A_1, B_1, C_1 respectiv D_1



Acum, pentru $\alpha_1 \parallel \alpha \parallel \alpha_2$ şi dreptele AB şi d avem

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1T}{TB_1} \quad (1)$$

Pentru $\alpha_2 \parallel \alpha \parallel \alpha_3$ şi dreptele BC şi d avem

$$\frac{BN}{NC} = \frac{B_1T}{TC_1} \quad (2)$$

Pentru $\alpha_3 \parallel \alpha \parallel \alpha_4$ şi dreptele CD şi d avem

$$\frac{CP}{PD} = \frac{C_1T}{TD_1} \quad (3)$$

Pentru $\alpha_4 \parallel \alpha \parallel \alpha_1$ şi dreptele DA şi d avem

$$\frac{DQ}{QA} = \frac{D_1T}{TA_1} \quad (4)$$

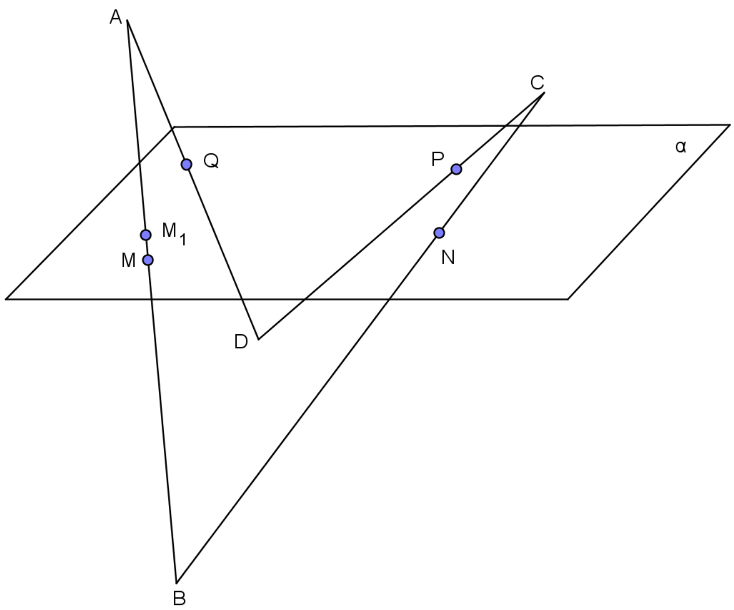
Din (1), (2), (3) şi (4) obţinem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = \frac{A_1T}{TB_1} \cdot \frac{B_1T}{TC_1} \cdot \frac{C_1T}{TD_1} \cdot \frac{D_1T}{TA_1} = 1$$

şi teorema este demonstrată.

Teorema 5. (Reciproca teoremei 4) Pe laturile unui patrulater strâmb $ABCD$ se consideră punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ şi $Q \in DA$. Dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$, atunci punctele M, N, P şi Q sunt coplanare.

Demonstraţie



Presupunem că cele patru puncte nu sunt coplanare.

Fie $\alpha = (NPQ)$ un plan care se intersectează cu AB în $M_1 \neq M$. Atunci, conform teoremei 4, pentru punctele M_1, N, P şi Q avem

$$\frac{AM_1}{M_1B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1 \quad (1)$$

Din ipoteza problemei se ştie că

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1 \quad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem că

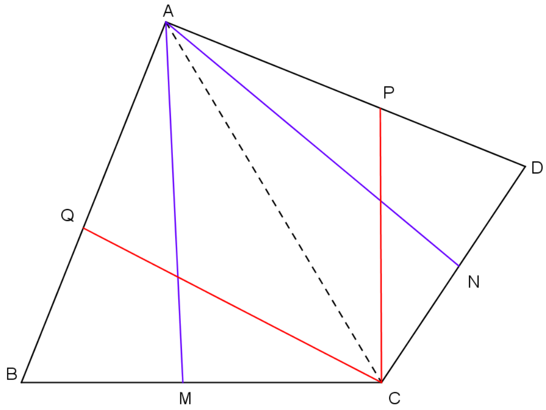
$$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{AM}{MB}$$

ceea ce este imposibil dacă $M_1 \neq M$.

În concluzie, punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater strâmb şi $[AM$ bisectoarea unghiului BAC ($M \in (BC)$), $[AN$ bisectoarea unghiului DAC ($N \in (CD)$), $[CQ$ bisectoarea unghiului ACB ($Q \in (AB)$), $[CP$ bisectoarea unghiului ACD ($P \in (AD)$). Arătaţi că punctele M, N, P, Q sunt coplanare dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Soluţie



Dacă punctele $M,\ N,\ P,\ Q$ sunt coplanare atunci, conform teoremei 4 vom avea

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PA}=1 \quad (1)$$

Acum, din teorema bisectoarei în $\triangle ABC$ avem

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AC}{BC} \quad (2)$$

şi

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC} \quad (3)$$

iar din teorema bisectoarei în $\triangle ACD$ avem

$$\frac{CN}{ND}=\frac{AC}{AD} \quad (4)$$

şi

$$\frac{DP}{PA}=\frac{CD}{AC} \quad (5)$$

Înlocuind în (1) obţinem

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{CD}{AC}=1$$

de unde

$$\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot AD}=1$$

sau

$$AB\cdot CD=BC\cdot AD$$

Să arătăm acum că dacă $AB\cdot CD=BC\cdot AD$ atunci punctele $M,\ N,\ P,\ Q$ sunt coplanare. Vom folosi teorema 5. Trebuie să demonstrăm că

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PA}=1$$

Folosind (2), (3), (4) şi (5) obţinem

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PA}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{CD}{AC}$$

Ţinând cont de faptul că $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ deducem că

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{CD}{AC} = 1$$

aşadar

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$$

şi conform teoremei 5 rezultă că punctele $M,\ N,\ P,\ Q$ sunt coplanare.