Divizibilitate. Câteva reguli de divizibilitate pentru numere prime

Lecție pentru clasa a VI-a

Această lecție prezintă câteva criterii de divizibilitate aplicabile pentru toate numerele prime diferite de 2 și 5, criterii mai puțin cunoscute și utilizate în practică, deși sunt foarte ușoare.

Divizibilitatea cu 7.Prezentarea algoritmului

Pentru a vedea dacă un număr este divizibil cu 7 poate fi utilizat următorul algoritm recursiv:

1.Se înmulțește ultima cifră a numărului cu 2

2.Se scade produsul de la pasul 1 din numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre a numărului inițial

3.Se continuă cu pașii 1 și 2 până când numărul obținut la pasul 2 se poate vedea cu ochiul liber dacă e divizibil cu 7. Un număr este divizibil cu 7 dacă și numai dacă numărul obținut la pasul 2 este divizibil cu 7.

Exemple:

- Este numărul 86415 divizibil cu 7?

86415 8641-2*5=8631

8631 863-2*1=861

861 86-2*1=84

84 8-2*4=0

Numărul este divizibil cu 7 deoarece 0 este divizibil cu 7.

- Este numărul 380247 divizibil cu 7?

380247 38024-2*7=38010

38010 3801-2*0=3801

3801 380-2*1=378

378 37-2*8=21

21 2-2*1=0

Numărul este divizibil cu 7 deoarece 0 este divizibil cu 7.

- Este numărul 380245 divizibil cu 7?

380245 38024-2*5=38014

38014 3801-2*4=3793

3793 379-2*3=373

373 37-2*3=31

31 3-2*1=1

Numărul nu este divizibil cu 7 deoarece 1 nu este divizibil cu 7.

Demonstrația algoritmului divizibilității cu 7 pentru orice număr

Considerăm n un număr natural. N este numărul obținut din numărul n prin tăierea ultimei cifre “a”.

Putem scrie n = 10N+a (Exemplu: 2345=234*10+5). Noi vrem să legăm numărul n de numărul obținut în urma aplicării algoritmului și anume, N-2a.

Vrem să arătăm că n este divizibil cu 7 dacă și numai dacă N-2a este divizibil cu 7.

n=10N+a=10(N-2a)+20a+a=10(N-2a)+21a

21a este divizibil cu 7, iar (10,7)=1, rezultă ca n este divizibil cu 7 dacă și numai dacă N-2a e divizibil cu 7.

Divizibilitatea cu 19.Prezentarea algoritmului

Pentru a vedea dacă un număr este divizibil cu 19 poate fi utilizat următorul algoritm recursiv:

1.Se înmulțește ultima cifră a numărului cu 2

2.Se adaugă la produsul de la pasul 1 din numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre a numărului inițial

3.Se continuă cu pașii 1 și 2 până când numărul obținut la pasul 2 se poate vedea cu ochiul liber dacă e divizibil cu 19. Un număr este divizibil cu 19 dacă și numai dacă numărul obținut la pasul 2 este divizibil cu 19.

Exemple:

- Este numărul 15276 divizibil cu 19?

15276 1527+2*6=1539

1539 153+2*9=171

171 17+2*1=19

Numărul este divizibil cu 19 deoarece 19 este divizibil cu 19.

- Este numărul 12312 divizibil cu 19?

12312 1231+2*2=1235

1235 123+2*5=133

133 13+2*3=19

Numărul este divizibil cu 19 deoarece 19 este divizibil cu 19.

Divizibilitatea cu 17.Prezentarea algoritmului

Pentru a vedea dacă un număr este divizibil cu 17 poate fi utilizat următorul algoritm recursiv:

1.Se înmulțește ultima cifră a numărului cu 5

2.Se scade produsul de la pasul 1 din numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre a numărului inițial

3.Se continuă cu pașii 1 și 2 până când numărul obținut la pasul 2 se poate vedea cu ochiul liber dacă e divizibil cu 17. Un număr este divizibil cu 17 dacă și numai dacă numărul obținut la pasul 2 este divizibil cu 17.

Exemple:

- Este numărul 82654 divizibil cu 17?

82654 8265-5*4=8245

8245 824-5*5=799

799 79-5*9=34

Numărul este divizibil cu 17 deoarece 34 este divizibil cu 17.

- Este numărul 17456 divizibil cu 17?

17456 1745-5*6=1715

1715 171-5*5=146

146 14-5*6=-16

Numărul nu este divizibil cu 17 deoarece -16 nu este divizibil cu 17.

Divizibilitatea cu p, p prim diferit de 2 și 5. Generalizarea algoritmului

Pentru a construi un algoritm care să determine dacă un număr este divizibil cu un număr prim p, vom căuta un număr natural k așa încât 10k±1 este divizibil prin p.

Atunci,

n=10N+a=10(N-ka)+10ka+a=10(N-ka)+(10k+1)a

sau

$n=10N+a=10(N+ka)-10ka+a=10(N+ka)-(10k-1)a$

Dacă $10k\pm1$ este divizibil cu p, atunci $(10k\pm1)a$ este divizibil cu p pentru orice cifră a. Ca urmare, $n=10N+a$ este divizibil cu p dacă și numai dacă N-ka sau N+ka(numărul obținut prin aplicarea algoritmului) este divizibil cu p.

Exemplificare pentru divizibilitatea cu 17 (p=17)

Pentru a determina dacă un număr este divizibil cu 17, trebuie să căutăm un număr de forma $10k\pm1$ divizibil cu 17. L-am găsit pe 51, ca urmare k=5. Deoarece 51=5*10+1, numărul obținut în urma aplicării algoritmului ar trebui să fie de forma N-ka, deci, algoritmul presupune scăderea produsului obținut prin înmulțirea ultimei cifre cu 5.

Exemplificare pentru divizibilitatea cu 13 (p=13)

Pentru a determina dacă un număr este divizibil cu 13, trebuie să căutăm un număr de forma $10k\pm1$ divizibil cu 13. L-am găsit pe 39, ca urmare k=4. Deoarece 39=4*10-1, numărul obținut în urma aplicării algoritmului ar trebui să fie de forma N+ka, deci, algoritmul presupune adunarea produsului obținut prin înmulțirea ultimei cifre cu 4.

Exemplificare pentru divizibilitatea cu 31(p=31)

Pentru a determina dacă un număr este divizibil cu 31, trebuie să căutăm un număr de forma $10k\pm1$ divizibil cu 31. L-am găsit chiar pe 31, ca urmare k=3. Deoarece 31=3*10+1, numărul obținut în urma aplicării algoritmului ar trebui să fie de forma N-ka, deci, algoritmul presupune scăderea produsului obținut prin înmulțirea ultimei cifre cu 3.

Bibliografie:

1.Zazkis R., *Divisibility: A Problem Solving Approach Through Generalizing and Specializing,*

Humanistic Mathematics Network Journal 21

2.http://whitecraneeducation.com