Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $a \in (-1,1)$, $b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $c_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq k-1$. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_i = c_i$, $0 \leq i \leq k-1$ şi $x_{n+k} = ax_n + b$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Fie x soluţia ecuaţiei $x = ax + b$. Atunci $x_{n+k} - x = a(x_n - x)$, deci $x_n = a^{\lfloor n/k \rfloor} c_r + x$, unde $n = r \pmod{k}$. **4p**

Cum $a \in (-1,1)$, rezultă $x_n \to x$. **3p**

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, cu $\det(A) = 0$. Demonstraţi că există $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $C \neq O_n$ şi $A^m = B^m - C^m$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Cum $\det(A) = 0$, sistemele omogene $AK = O_{n,1}$, $K \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ şi $LA = O_{1,n}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ au soluţii nebanale. Deoarece $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, aceste soluţii pot fi luate cu elemente raţionale; prin înmulţire cu un factor convenabil, ele pot fi făcute să aibă coeficienţi întregi. Fie $C = KL \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$; avem $C \neq O_n$. **5p**

Deducem $AC = CA = O_n$, de unde rezultă imediat prin inducţie că $(A + C)^m = A^m + C^m, \forall m \in \mathbb{N}^*$, deci putem lua $B = A + C$. **2p**

Problema 3. Pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definim funcţia $g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g_f(x) = f(x - \sin x)$.

a) Demonstraţi că dacă g_f are limită în 0, egală cu $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f are limită în 0, iar aceasta este tot ℓ.

b) Demonstraţi că este posibil ca g_f să fie derivabilă în 0, dar f să nu fie derivabilă în 0.

Soluţie. a) Funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $u(x) = x - \sin x$ este strict crescătoare şi surjectivă, deci are inversa v. Cum u este continuă, rezultă că v este continuă. **2p**

Din $g_f = f \circ u$ rezultă $f = g_f \circ v$, din continuitatea lui v deducem

$$\lim_{x\to 0} v(x) = v(0) = 0,$$

iar concluzia rezultă din teorema referitoare la limita unei compuneri de funcţii (observând că $v(x) \neq 0$ dacă $x \neq 0$). **2p**

b) Pentru $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(0) = +\infty$, iar

$$(g_f)'(0) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}.$$

.... **3p**