PROBLEME DE NUMĂRARE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva modalităţi de a realiza numărarea unor situaţii.

Lecţia se adresează clasei a IV-a.
Data: 8 noiembrie 2010
Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

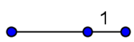
De la început trebuie să remarcăm faptul că problemele de numărare sunt în general probleme care nu se adresează unei clase anume. În cele mai multe cazuri rezolvarea unei probleme de numărare nu necesită cunoştiinţe foarte avansate de matematică. Pentru o mai bună înţelegere a temei vom rezolva împreună câteva probleme de acest gen pe care le vom comenta.

Problema 1: La începutul programului casiera de la casa de bilete a unui teatru constată că primul bilet vândut are numărul 25437. La sfârşitul programului aceasta constată că ultimul bilet vândut are numărul 25643. Câte bilete a vândut casiera?

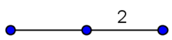
Soluţie: Vom gândi astfel: să presupunem că s-au vândut n bilete şi că primul bilet vândut este reprezentat de segmentul din figura de mai jos.

În continuare vom reprezenta prin segmente numerele celorlalte bilete vândute.

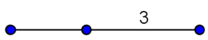
Biletul 2



Biletul 3

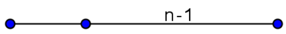


Biletul 4



Observând că la biletul 2 adunăm 1, la biletul 3 adunăm 2, la biletul 4 adunăm 3, putem afirma că la biletul n vom aduna $n-1$.

Biletul n



Cum numărul biletului 1 este 25437, iar numărul biletului n este 25643 înseamnă că $n-1 = 25643 - 25437$ sau $n-1 = 206$, de unde $n = 207$.

În concluzie s-au vândut 207 bilete.

Putem acum să răspundem la întrebarea: "Fie a şi b două numere naturale, $a < b$. Câte numere naturale avem de la a până la b?

Procedând ca mai sus întrebarea noastă poate avea trei răspunsuri.

1. Dacă sunt numărate şi numerele a şi b, atunci vom avea $b-a+1$ numere;

2. Dacă este numărat numai unul dintre numerele a şi b, atunci vom avea $b-a$ numere;

3. Dacă nu se numără nici a nici b, atunci vom avea $b-a-1$ numere.

Problema se poate rezolva asemănător şi în cazul în care numerele nu sunt consecutive , dar cresc cu aceeaşi valoare, r. În acest caz, dacă a şi b sunt primul, respectiv ultimul număr din secvenţă, atunci numărul de numere este egal cu $(b-a):r+1$.

Exemplu: Avem numerele 3; 7, 11; 15,...,51. Câte numere sunt în această secvenţă?

Se observă că, începând cu al doilea, fiecare număr este cu 4 mai mare decât precedentul. Atunci numărul de numere din secvenţă va fi (51-3):4+1, adică 13.

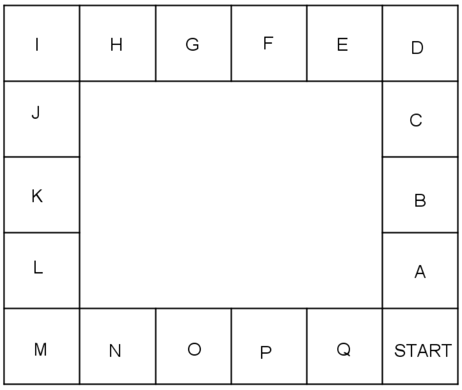
Problema 2: Câte numere de trei cifre se pot forma astfel încât cifra sutelor să fie 2, 4, 5 sau 7, cifra zecilor să fie 3 sau 5, iar cifra unităţilor să fie 0, 1, 2, 3 sau 4?

Soluţie: Gândim astfel. Cifra sutelor poate avea 4 valori: 2, 4, 5 sau 7. Pentru o valoare a cifrei sutelor (să zicem 2) cifra zecilor poate avea 2 valori: 3 sau 5. Înseamnă că atunci când am fixat şi cifra sutelor şi cifra zecilor avem 4×2 numere. Pentru fiecare dintre aceste numere cifra unităţilor poate avea 5 valori: 0, 1, 2, 3 sau 4. Rezultă că în total sunt $4\times2\times5$ numere, adică 40 de numere.

Problema de mai sus ne arată că dacă avem de efectuat mai multe operaţii succesive $(O_1, O_2, ..., O_p)$ şi fiecare operaţie poate fi efectuată într-un număr de moduri (O_1 în m_1 moduri, O_2 în m_2 moduri,...,O_p în m_p moduri), atunci sucesiunea tuturor operaţiilor poate fi efectuată în $m_1 \times m_2 \times ... \times m_p$ moduri.

În problema prezentată mai sus operaţiile succesive sunt: O_1: înlocuirea cifrei sutelor, iar numărul de moduri este $m_1 = 4$, O_2: înlocuirea cifrei zecilor, iar numărul de moduri este $m_2 = 2$ şi O_3: înlocuirea cifrei unităţilor, iar numărul de moduri este $m_3 = 5$.

Problema 3: Un ogar aleargă pe o pistă ca cea din figura de mai jos. La fiecare salt parcurge 4 căsuţe. În care căsuţă se va afla după 157 de salturi?



Soluţie: Ne gândim că pentru o numărare mai rapidă ar fi minunat ca după un număr de salturi ogarul să ajungă din nou în căsuţa de start. Să vedem dacă acest lucru se întâmplă. La saltul 1 ogarul este în căsuţa D; la saltul 2 se află în căsuţa H; la saltul 3 se află în căsuţa L; la saltul 4 se află în căsuţa P; la saltul 5 se află în căsuţa B; la saltul 6 se află în căsuţa F; la saltul 7 se află în căsuţa J; la saltul 8 se află în căsuţa N; la saltul 9 se află în căsuţa $START$. Deci, la fiecare 9 salturi ogarul revine în căsuţa $START$. Atunci ne întrebăm de câte ori se cuprinde 9 în 157? În urma împărţirii (157:9) obţinem câtul 17 şi restul 4. Asta înseamnă că ogarul face 17 ture de câte 9 salturi şi apoi mai face 4 salturi. După cele 17 ture se va afla în căsuţa $START$. Acum, până la cel de-al 157-lea salt mai are de efectuat 4 salturi. Deci se va afla în căsuţa P.

Să remarcăm că la acest gen de problemă munca ne-a fost uşurată de faptul că fenomenul se repetă după un număr de paşi, adică se ajunge în situaţia de la care s-a pornit.

Bibliografie:
[1] Ghioca A, Cojocaru L, Matematica gimnazială dincolo de manual, Editura GIL, 2005
[2] Schwarz D, Popa G, Probleme de numărare, Editura GIL, 2007