ViitoriOlimpici.ro

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 2. Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Se notează cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor BDC respectiv ADC. Arătați că punctele A, B, H_1, H_2 sunt coplanare dacă și numai dacă sunt conciclice.

Viitori Olimpici

Soluţie şi barem

Dacă punctele sunt conciclice atunci ele sunt coplanare. .... **1 punct**

Reciproc, dacă punctele sunt coplanare și $BH_1 \cap CD = \{T\}$, atunci $\{T\} = (ABH_1) \cap CD$ deci $AH_2 \cap CD = \{T\}$. .... **1 punct**

Triunghiurile H_1TC și DTB sunt asemenea, fiind dreptunghice și $\angle H_1CT = 90^\circ - \angle BDC = \angle DBT$. Prin urmare, $\dfrac{H_1T}{DT} = \dfrac{TC}{TB}$, deci $TH_1 \cdot TB = TC \cdot TD$. .... **2 puncte**

Analog se demonstrează că $TH_2 \cdot TA = TC \cdot TD$, prin urmare $TH_1 \cdot TB = TH_2 \cdot TA$. Din teorema reciprocă a puterii punctului față de cerc rezultă conciclicitatea punctelor A, B, H_1,H_2. **3 puncte**