Problema 2
Etapa 2
Clasa a VI-a

Problema 2. Precizaţi forma numărului natural nenul n pentru care numerele $a = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n}$ şi $b = 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^n$ sunt simultan divizibile cu 3 și 5.

* * *

Soluţie: Numărul a poate fi scris $a = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n$.

Numărul termenilor lui a este n, la fel numărul termenilor lui b este n.

Pentru ca numărul a să se divida cu 3 și 5.

Observăm că $4 + 4^2 = 20$ care se divide cu 5. Suma a doi termeni consecutivi se poate scrie $4^k + 4^{k+1} = 4^k(1 + 4) = 4^k \cdot 5$ care se divide cu 5.

Deci, pentru ca numărul a să se dividă cu 5 trebuie să aibă un număr par de termeni, adică $n = 2k$, unde k este număr natural. (1)

Observăm că $4 + 4^2 + 4^3 = 84$ care se divide cu 3. Suma a trei termeni consecutivi se poate scrie $4^k + 4^{k+1} + 4^{k+2} = 4^k(1 + 4 + 4^2) = 4^k \cdot 21$ care se divide cu 3.

Deci, pentru ca numărul a să se dividă cu 3 trebuie ca numărul termenilor să fie multiplu al lui 3, adică $n = 3p$, unde p este număr natural. (2)

Din (1) și (2) deducem că numărul a se divide cu 3 și 5 daca $n = 6q$, unde q este număr natural. (3)

Pentru ca numărul b să se dividă cu 3 și 5.

Observăm că $7 + 7^2 + 7^3 = 399$ care se divide cu 3. Suma a trei termeni consecutivi se poate scrie $7^k + 7^{k+1} + 7^{k+2} = 7^k(1 + 7 + 7^2) = 7^k \cdot 57$ care se divide cu 3.

Deci, pentru ca numărul b să se dividă cu 3 trebuie ca numărul termenilor să fie multiplu al lui 3, adică $n = 3r$, unde r este număr natural. (4)

Observăm că $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$ care se divide cu 5. Suma a patru termeni consecutivi se poate scrie $4^k + 4^{k+1} + 4^{k+2} + 7^{k+3} = 7^k(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = 7^k \cdot 400$ care se divide cu 5.

Deci, pentru ca numărul b să se dividă cu 3 trebuie ca numărul termenilor să fie multiplu al lui 4, adică $n = 4s$, unde s este număr natural. (5)

Din (4) și (5) deducem că numărul b se divide cu 3 și 5 daca $n = 12t$, unde t este număr natural. (6)

Din (3) și (6) deducem că numerele a și b sunt simultan divizibile cu 3 și 5 dacă n este multiplu al lui 12.