Concursul "Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro"
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a VI-a

Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Notăm cu E simetricul lui B faţă de C şi cu F simetricul lui C faţă de B. Considerăm punctele $L \in BC$, $M \in AF$ şi $N \in AE$ astfel încât $AL \perp BC$, $BM \perp AF$ şi $CN \perp AE$.

a) Arătaţi că $AE = AF$.

b) Demonstraţi că dreptele BM, CN şi AL sunt concurente.

c) Ştiind că $BM + MN + NC = 100\,\text{cm}$, calculaţi lungimea segmentului AB.

Constantin Niţă Cristi, ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Triunghiurile ABF şi ACE sunt congruente (L.U.L.), prin urmare $AE = AF$. **2p**

b) Fiind înălţimi ale bazelor în triunghiuri isoscele, BM, CN şi AL sunt bisectoare ale unghiurilor $\angle ABF$, $\angle ACE$ respectiv $\angle BAC$. **1p**

Concurenţa dreptelor BM, CN şi AL revine la concurenţa bisectoarelor exterioare din B şi C şi a bisectoarei interioare din A ale triunghiului ABC. **1p**

c) BM este catetă care se opune unui unghi de 30° în triunghiul dreptunghic ABM, prin urmare $BM = \frac{1}{2}AB$. Analog se arată că $CN = \frac{1}{2}AB$. **1p**

MN este linie mijlocie în triunghiul AFE, deci $MN = \frac{1}{2}FE = \frac{3}{2}AB$. .. **1p**

Astfel, $BM + MN + NC = \frac{5}{2}AB = 100\,\text{cm}$, de unde $AB = 40\text{cm}$. **1p**

Problema 2. Fie a, b, c, d, e, f cifre (în baza 10) cu $a \cdot f \neq 0$.

a) Dacă $\overline{abcde} = 10008 \cdot f$, arătaţi că numărul $\overline{abcdef}$ este divizibil cu 41.

Prelucrare, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) Demonstraţi că numărul $\overline{abcdef}$ este divizibil cu 41 dacă şi numai dacă numărul $\overline{fabcde}$ este divizibil cu 41.

Cristian Mangra şi Mircea Fianu

Soluţie. a) $\overline{abcdef} = 10 \cdot \overline{abcde} + f = 100081 \cdot f = 41 \cdot 2441 \cdot f \,\vdots\, 41$. *Altfel*, se determină cele nouă numere care au proprietatea din enunţ şi se verifică faptul că fiecare dintre ele este divizibil cu 41. .... **3p**

b) Deoarece $\overline{abcdef} = 10\overline{abcde} + f$, avem $10\overline{fabcde} - \overline{abcdef} = 10^6 \cdot f + 10\overline{abcde} - 10\overline{abcde} - f = 99999 \cdot f = 41 \cdot 2431$. **2p**

Dacă $\overline{fabcde} \,\vdots\, 41$, este clar că $\overline{abcdef} \,\vdots\, 41$. Reciproc, dacă $\overline{abcdef} \,\vdots\, 41$, deoarece numerele 41 şi 10 sunt relativ prime, rezultă că $\overline{fabcde} \,\vdots\, 41$. **2p**

Problema 3. Scriem fiecare număr natural de trei cifre pe câte un cartonaş şi introducem cele 900 de cartonaşe într-o cutie.

a) Extragem, la întâmplare, un cartonaş din cutie. Care este probabilitatea ca numărul de pe cartonaşul extras să aibă suma cifrelor 5?

b) Care este numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor?

Sergiu Prisacariu şi Gabriel Popa

Soluţie. a) Există 15 numere de trei cifre care au suma cifrelor 5: 104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302, 311, 320, 401, 410, 500. Probabilitatea cerută este $P = \frac{15}{900} = \frac{1}{60}$. **2p**

b) Sumele posibile ale cifrelor numerelor de pe cartonaşe sunt 1, 2, 3, ..., 27. Există un singur cartonaş cu suma cifrelor 1 (anume 100) şi doar unul cu suma cifrelor 27 (anume 999). Avem în cutie câte trei cartonaşe cu sumele cifrelor 2 (101, 110 şi 200) sau 26 (anume 998, 989 şi 899). Există câte şase cartonaşe cu sumele cifrelor 3 (300, 210, 201, 120, 102 şi 111) sau 25 (anume 988, 898, 889, 997, 979, 799). Celelalte 21 posibile sume ale cifrelor (4, 5, 6, ..., 24) apar, fiecare, pe mai mult de câte şase cartonaşe. **2p**

Dacă vom extrage $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 21 \cdot 6 = 146$ cartonaşe, este posibil să avem cel mult câte şase numere cu o aceeaşi sumă a cifrelor. **2p**

Numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor este $146 + 1 = 147$. **1p**