ECUAȚIA LUI PELL (pentru clasele VII – VIII)

– Țolu Diana, clasa a VIII-a
Șc. „Eugen Ionescu", Slatina, Olt
profesor: Năsui Mariana

Lecție pentru clasa a VIII-a,
Diana Țolu, clasa a VIII-a

Dacă d este un nr. natural nenul, care nu este pătrat perfect, atunci ecuația $x^2 - dy^2 = 1$ cu variabilele x și y numere întregi se numește ecuație de tip Pell, această denumire provenind de fapt dintr-o eroare a lui Euler, care a atribuit-o lui John Pell (1611–1685), deși P. Fermat a fost primul care s-a preocupat de ea.

O soluție (x, y) a unei ecuații Pell se numește pozitivă dacă x și y sunt simultan numere întregi pozitive. De asemenea, o soluție pozitivă (x_1, y_1) se numește soluție fundamentală (sau minimală) dacă satisface proprietatea că $x_1 < x$ și $y_1 < y$, pentru orice altă soluție pozitivă (x, y).

Teoremă: Ecuația de tip Pell $x^2 - dy^2 = 1$ are o infinitate de soluții pozitive.

Considerând (x_1, y_1) soluția fundamentală a acestei ecuații, atunci pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim:

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Perechile (x_n, y_n) reprezintă toate soluțiile pozitive ale acestei ecuații Pell. Numerele x_n și y_n cresc la infinit și stabilesc relațiile de recurență

$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n. \\ y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n. \end{cases}$$

De asemenea, din $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ derivă și $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$, așadar:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2}. \\[2ex] y_n = \dfrac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n - (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}. \end{cases}$$

Despre ecuația „geamănă" $x^2 - dy^2 = -1$ – ecuație Pell negativă, cunoaștem, în general că, în cazul în care există o soluție pozitivă fundamentală (x_1, y_1), atunci toate soluțiile sale pozitive vor fi perechi de tipul (x, y) astfel încât:

$$x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n-1}.$$

Acum, familiarizați fiind cu noțiunile de bază despre acest tip de ecuație, putem trece la aplicații.

① Rezolvați ecuația $x^2 + x + 1 = 3y^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Obs: W. Sierpiński spune că, în 1950, R. Oblath a emis ipoteza că în afară de $(1,1)$ ecuația nu mai are alte soluții, dar în același an T. Nagell a găsit soluția $x = 313$ și $y = 181$. Ulterior, s-a demonstrat că ecuația are o infinitate de soluții.

Înmulțind-o cu 4 și grupând termenii convenabil, ecuația se rescrie: $(2x+1)^2 + 3 = 12y^2$. Evident că $3 \mid 2x+1$ și, notând $2x+1 = 3v$ și $2y = u$, obținem: $9v^2 + 3 = 3u^2 \Rightarrow u^2 - 3v^2 = 1$, ecuație de tip Pell cu soluția fundamentală $(2, 1)$. Deci, toate soluțiile acestei ecuații sunt date de $u_n + v_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, ajungem la:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \\ v_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cum $2y = u \Rightarrow \frac{u}{2} = y$.

$2x+1 = 3v \Rightarrow \frac{3v-1}{2} = x$.

$\Rightarrow$ Soluțiile ecuației date vor fi:

$(y,x) \in \left\{ \left(\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \right) - \frac{1}{2} \right) \right\}$, iar pentru ca cele două numere să fie întregi, este necesar ca n să fie impar, fapt de care nu ne vom ocupa acum.

② Demonstrați că există o infinitate de triplete de numere întregi consecutive cu proprietatea că fiecare dintre cele trei numere poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

(Concursul de matematică Putnam)

Primul triplet cu această proprietate este $8 = 2^2 + 2^2$, $9 = 3^2 + 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$, fapt care ne sugerează să considerăm tripletele de forma x^2-1, x^2 și x^2+1. Întrucât ecuația de tip Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ are o infinitate de soluții pozitive (x,y), deducem că $\exists$ o infinitate de numere $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^2 - 1 = y^2 + y^2$, $x^2 = x^2 + 0^2$, $x^2 + 1 = x^2 + 1^2$, deci pentru care tripletul de numere întregi (x^2-1, x^2, x^2+1) îndeplinește proprietatea ilustrată. Deci, deducem că $\exists$ o infinitate de triplete de forma cerută.

③ Demonstrați că există o infinitate de numere naturale k astfel încât $2k+1$ și $3k+1$ sunt simultan pătrate perfecte.

(American Math Monthly E2606, R.S. Luthar)

Să considerăm $2k+1 = u^2$ și $3k+1 = v^2$.

Astfel, obținem că $3u^2 - 2v^2 = 1$, iar de aici, prin substituția $u = x+2y$ și $v = x+3y$, ecuația se va scrie:

$x^2 - 6y^2 = 1$, ecuație de tip Pell cu soluția fundamentală $(5,2)$. Deci, toate soluțiile acestei ecuații vor fi date de:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n}{2} \\ y_n = \dfrac{(5+2\sqrt{6})^n - (5-2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Deci: $u_n = x_n + 2y_n = \dfrac{(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n}{2} + \dfrac{(5+2\sqrt{6})^n - (5-2\sqrt{6})^n}{\sqrt{6}}$ (*).

De asemenea, cum $3u^2 - 2v^2 = 1 \Rightarrow u$ este impar, deci putem defini numerele naturale căutate ca fiind $k_n = \frac{u_n^2 - 1}{2} \in \mathbb{N}$, cum u_n = impar, deci, cum există o infinitate de numere naturale u_n de forma (*), deducem că vor exista o infinitate de numere naturale k cu proprietatea cerută.

④ Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că: $n^2+1 \mid n!$.

(Kvant)

Ecuația Pell negativă $x^2-5y^2=-1$ are soluția fundamentală $(2,1)$, deci va avea o infinitate de soluții pozitive definite prin:

$x+y\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2n-1}$

Să considerăm soluțiile cu $y>5$.

Întrucât $4y^2 \leq 5y^2-1=x^2$, obținem că $5<y<2y\leq x$.

Deci:

$2(x^2+1)=5\cdot y\cdot 2y$ va divide pe $x!$, ceea ce este chiar mai mult decât ne-am propus să obținem.

⑤ Determinați toate numerele naturale nenule $k<m$ astfel încât:

$1+2+\ldots+k=(k+1)+(k+2)+\ldots+m$.

(College Math. Journal)

Adăugând $1+2+\ldots+k$ în ambii membri, vom obține:

$2(1+2+\ldots+k)=1+2+\ldots+m$

$\Rightarrow 2\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}$

$\Rightarrow 2k(k+1)=m(m+1)$

$\Rightarrow 2k^2+2k=m^2+m \,/\cdot 4$

$\Rightarrow 8k^2+8k=4m^2+4m$

$\Rightarrow 8k^2+8k+2-1=4m^2+4m+1$

$\Rightarrow 2(2k+1)^2-1=(2m+1)^2$

Deci, ajungem la:

$(2m+1)^2-2(2k+1)^2=-1$.

Ecuația Pell negativă $x^2-2y^2=-1$ are soluția fundamentală $(1,1)$, deci soluțiile pozitive ale acestei ecuații sunt perechile (x_n,y_n) cu $x_n+y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2n-1}$.

Atunci:

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1}+(1-\sqrt{2})^{2n-1}}{2} \\ y_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1}-(1-\sqrt{2})^{2n-1}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Din moment ce $x^2-2y^2=-1$ implică faptul că x este impar, deci x se poate scrie sub forma $2m+1$, iar y^2 devine $2m^2+2m+1$, ceea ce implică faptul că y este impar, deci y poate fi scris sub forma $2k+1$.

$\Rightarrow$ soluțiile dorite vor fi:

$(k,m)=\left(\frac{y_n-1}{2},\frac{x_n-1}{2}\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

⑥ Demonstrați că ecuația $a^2+b^3=c^4$ are o infinitate de soluții în mulțimea nr. naturale nenule.

Pornim de la identitatea

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Astfel, vom obține că:

$$\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, (\forall) n\in\mathbb{N}, n>1.$$

Deci, tot ce ne va mai rămâne de făcut este să demonstrăm că $\exists$ o infinitate de nr. $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$, astfel încât $\frac{n(n+1)}{2}=k^2$, pentru $k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $(a,b,c)=\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}, n, k\right)$ rezolvă problema.

Din $\frac{n(n+1)}{2}=k^2 \Rightarrow n^2+n=2k^2 \Rightarrow (2n+1)^2-2\cdot(2k)^2=1.$

Cum ecuația de tip Pell $x^2-2y^2=1$ are o infinitate de soluții pozitive pentru care x va fi impar, deci $x=2m+1$, de unde $y^2=2m^2+2m=$ par, deducem că toate soluțiile (x,y) ale acestei ecuații pot fi scrise sub forma $(2n+1, 2k)$. Așadar, cum $n=\frac{x-1}{2}\in\mathbb{N}$, iar condiția ca $n>1$ este stabilită pentru soluțiile cu $x>3$, deducem că $\exists$ o infinitate de numere n cu proprietățile date.

<u>Probleme propuse</u>:

1. Determinați toate numerele naturale nenule n cu proprietatea că $\frac{n(n+1)}{3}$ este pătrat perfect.

   (Dorin Andrica)

2. Aflați toate triunghiurile care au lungimile laturilor numere naturale consecutive și aria de asemenea un număr natural.

3. Găsiți toate perechile (x,y) de numere naturale nenule care satisfac ecuația $x^2-6xy+y^2=1$.

   (Titu Andreescu)

4. Găsiți toate perechile (x,y) de numere naturale nenule care satisfac ecuația $2x^2+x+1=y^2$.

   (I. Cucurezeanu)

<u>Bibliografie</u>:

- Ion Cucurezeanu – „Ecuații în numere întregi", Aramis.
- Titu Andreescu, Dorin Andrica – „O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene", Gil.