Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018
Clasa a IV-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n mai mici decât un miliard astfel încât $n = (s(n))^2 + (s(10n))^2 + (s(100n))^2$, unde cu $s(k)$ am notat suma cifrelor lui k.

Soluţie: Numerele $10n$ şi $100n$ au suma cifrelor egală cu a numărului n, deci $s(n) = s(10n) = s(100n)$, de unde deducem că $n = 3 \cdot [s(n)]^2$. (1)

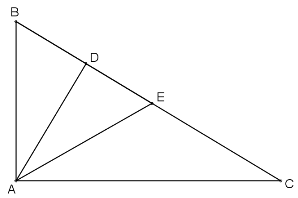
Rezultă că n este divizibil cu 3, deci şi $s(n)$ este divizibil cu 3. Din relaţia anterioară obţinem că n este divizibil cu 9, deci şi $s(n)$ este divizibil cu 9. .... **3p**

Cum n este mai mic decât un miliard, deducem că n are cel mult 9 cifre, deci $s(n)$ este cel mult egal cu $9 \cdot 9 = 81$. Cum $s(n)$ este divizibil cu 9 obţinem $s(n) \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. **2p**

Înlocuim $s(n)$ în relaţia (1). Pentru $s(n) \in \{9, 18\}$ obţinem $n = 243$, respectiv $n = 972$.

Pentru $s(n) \in \{27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$ obţinem numere care nu au suma cifrelor egală cu cea indicată. **2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC$ ($D \in BC$) şi $E \in (BC)$ astfel încât $BE = AB$. Arătaţi că (AE este bisectoarea unghiului CAD.



Soluţie: Notăm măsura unghiului BAD cu a şi măsura unghiului DAE cu x. Avem $m(\sphericalangle BAE) = a + x$. Din $BE = AB$ rezultă că $\triangle BAE$ este isoscel şi atunci $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle BAE) = a + x$. **3p**

Din $\triangle ABD$ dreptunghic în D avem $m(\sphericalangle BAD = 90° - m(\sphericalangle ABD)$ (1), iar din $\triangle ABC$ dreptunghic în A avem $m(\sphericalangle ACB = 90° - m(\sphericalangle ABC)$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BAD) = a$. **2p**

Acum, $\sphericalangle AEB$ este unghi exterior triunghiului AEC şi atunci $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle ECA) + m(\sphericalangle EAC)$, de unde rezultă $m(\sphericalangle EAC) = x$. Cum $m(\sphericalangle DAE) = x$ rezultă $m(\sphericalangle DAE) = m(\sphericalangle EAC)$, de unde AE bisectoarea unghiului CAD. **2p**

Problema 3. Avem trei cartoane. Pe fiecare carton este scris un alt număr natural de la 1 la 9. Fără să se vadă numerele, s-au distribuit cartoanele la trei elevi. Fiecare şi-a notat numărul de pe cartonul primit, apoi s-au strâns cartoanele, s-au amestecat şi s-au redistribuit aceloraşi trei elevi. Aceştia au notat din nou numărul primit şi au returnat cartoanele. Au procedat la fel şi a treia oară. Apoi fiecare elev a spus tare suma numerelor pe care le-a scris: 13, 15 şi 23. Ce numere au fost scrise pe bucăţile de carton?

Soluţie: Fie a, b, c cele trei numere scrise pe cele trei cartoane, $a < b < c$. În cele trei distribuiri, fiecare număr apare de trei ori. Avem $3a + 3b + 3c =$

$13+15+23$, de unde $a+b+c=17$. **1p**

Presupunând $c \leq 7$ avem $a+b+c \leq 21$ şi nu se poate obţine suma 23. Prin urmare $c \geq 8$.

Pentru $c=8$ obţinem cazurile $(2,7,8)$, $(3,6,8)$ şi $(4,5,8)$, iar pentru $c=9$ obţinem cazurile $(1,7,9)$, $(2,6,9)$ şi $(3,5,9)$. **2p**

Un elev nu poate primi toate cele trei cartoane, $17 \notin \{13,15,23\}$

Dacă un elev primeşte de trei ori acelaşi număr, atunci suma lui este divizibilă cu 3, adică este 15. De aici $b=5$. Rămân posibile cazurile $(4,5,8)$ şi $(3,5,9)$. Una din sumele celorlalţi doi elevi este de forma $2x+y$. Cum $2\cdot 4+8$ şi $2\cdot 3+9$ sunt diferite de 13 şi 23, rezultă că această situaţie nu este posibilă. **2p**

Deducem că fiecare elev primeşte de două ori un acelaşi număr şi încă un număr, deci sumele lor sunt de forma $2x+y$, cu $x,y \in \{a,b,c\}$. De aici, cum 13, 15 şi 23 sunt numere impare, rezultă a,b,c sunt numere impare. Rămân cazurile $(1,7,9)$ şi $(3,5,9)$.

Verifică numai tripletul $(3,5,9)$. Într-adevăr, $2\cdot 3+9=15$, $2\cdot 5+3=13$ şi $2\cdot 9+5=23$. **2p**