Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a X-a

Problema 1. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) Determinaţi funcţiile injective din $\mathcal{F}$.

b) Determinaţi funcţiile surjective din $\mathcal{F}$.

Dorel Miheţ şi Mihai Monea, ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Relaţia din ipoteză conduce la $f(f(x)+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $f(f(y) + x) = f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Obţinem imediat că

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \iff f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$. Funcţia g verifică relaţia $g(x) = g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, aşadar există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

În concluzie, funcţiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

şi se verifică faptul că aceste funcţii sunt soluţii ale problemei. **1p**

b) Fie f o funcţie surjectivă din $\mathcal{F}$; vom arăta că f este şi injectivă. ..**1p**

Pentru aceasta, fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = f(b)$. Din ipoteză, avem că

$$f(f(x)) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Există $c, d \in \mathbb{R}$ pentru care $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Înlocuind $x = c$, apoi $x = d$ în relaţia anterioară, obţinem $f(a) = a + f(0)$, respectiv $f(b) = b + f(0)$. Din $f(a) = f(b)$ rezultă că $a + f(0) = b + f(0)$, deci $a = b$.

Prin urmare, funcţiile surjective sunt injective şi regăsim soluţiile de la punctul anterior. **2p**

Problema 2. Considerăm două numere complexe u şi v, având acelaşi modul, pentru care există a, b, c şi d numere reale strict pozitive astfel încât $\max\{a,b,c\}<d$, $a+d=b+c$ şi

$$|au+dv|\leq|bu+cv|.$$

Demonstraţi că $u=v$.

Prelucrare de Mihai Monea, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

Soluţia I. Ultima relaţie din ipoteză se scrie succesiv:

$$
\begin{aligned}
& |au+dv|^2\leq|bu+cv|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (au+dv)(a\overline{u}+d\overline{v})\leq(bu+cv)(b\overline{u}+c\overline{v}) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(a^2+d^2\right)|u|^2+ad\,(u\overline{v}+\overline{u}v)\leq\left(b^2+c^2\right)|u|^2+bc\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \text{ ....}\mathbf{1p} \\
\Leftrightarrow\quad & (a+d)^2|u|^2-2ad\,|u|^2+ad\,(u\overline{v}+\overline{u}v)\leq(b+c)^2|u|^2-2bc\,|u|^2+bc\,(u\overline{v}+\overline{u}v) \\
\Leftrightarrow\quad & ad\left(u\overline{v}+\overline{u}v-2|u|^2\right)\leq bc\left(u\overline{v}+\overline{u}v-2|u|^2\right) \text{ ....}\mathbf{2p} \\
\Leftrightarrow\quad & (ad-bc)\left(u\overline{v}+\overline{u}v-|u|^2-|v|^2\right)\leq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (bc-ad)\,|u-v|^2\leq 0
\end{aligned}
$$

.... **1p**

Pe de altă parte, este adevărată inegalitatea $bc>ad$. Într-adevăr, putem presupune $b\leq c$ şi, cum $d-c=b-a\overset{not}{=}r>0$, avem:

$$ad=(c+r)(b-r)=bc-r(c-b)-r^2<bc.$$

.... **2p**

Rezultă astfel că $|u-v|^2=0$ şi, de aici, concluzia problemei. **1p**

Soluţia a II-a. Notăm $k=\frac{d}{a+d}$ şi $l=\frac{c}{b+c}$; relaţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$(1)\quad |(1-k)\,u+kv|\leq|(1-l)\,u+lv|.$$

.... **1p**

Presupunem, prin absurd, că $u\neq v$. În planul complex de origine $O(0)$, considerăm punctele (distincte, conform presupunerii asumate!) $A(u),B(v)$, $M((1-k)\,u+kv)$ şi $N((1-l)\,u+lv)$. Evident, punctele M şi N sunt interioare segmentului AB. **3p**

În plus, deoarece $k>l$ şi $k>1-l$, punctul N este situat între punctele M şi M', unde M' este simetricul lui M faţă de mijlocul segmentului AB. Rezultă că $OM>ON$, prin urmare

$$(2)\quad |(1-k)\,u+kv|>|(1-l)\,u+lv|.$$

Relaţiile (1) şi (2) fiind contradictorii, rămâne adevărată concluzia problemei. **3p**

Problema 3. Demonstraţi că singurul număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[n]{abc},$$

oricare ar fi numerele reale nenegative a, b şi c, este $n = 14$.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu

Soluţie. Pentru început, demonstrăm valabilitatea inegalităţii pentru cazul $n = 14$. Formula de dezvoltare a binomului conduce la

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \geq C_n^{n-1} x y^{n-1} = nxy^{n-1}, \forall x, y \in [0,\infty), \forall n \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}\right)^{14} &= \left(a+\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^{7} \geq 7a\left(\sqrt{b+\sqrt{c}}\right)^{6} \\ &= 7a\left(b+\sqrt{c}\right)^{3} \geq 21abc \geq abc,\end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \geq \sqrt[14]{abc}, \forall a, b, c \in [0,\infty).$$

.... **4p**

Demonstrăm acum că, oricare ar fi $n \geq 2, n \neq 14$, există valori $a, b, c \in [0,\infty)$ pentru care inegalitatea din enunţ este falsă. Considerând $a = x^2$, $b = x^4$ şi $c = x^8$, unde $x \geq 0$, un număr n care are proprietatea dorită trebuie să verifice inegalitatea

$$(\star) \quad x\sqrt{1+\sqrt{2}} \geq x^{\frac{14}{n}}, \forall x \in [0,\infty).$$

.... **1p**

Dacă $n < 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{n}{14-n}} \geq x, \forall x \in (0,\infty),$$

ceea ce nu este posibil (valorile mari ale lui x conduc la contradicţii). **1p**

Dacă $n > 14$, relaţia $(\star)$ conduce la

$$x^{\frac{n-14}{n}} \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}, \forall x \in (0,\infty),$$

fapt care, din nou, nu este adevărat (valorile apropiate de 0 ale lui x conduc la contradicţii). **1p**