Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a VII-a

Problema 1. Arătaţi că pentru orice număr real x au loc inegalităţile:
a) $x^8 + x^5 + 1 > x^4 + x$,

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) $x^8 + x^3 + 1 > x^7 + x^4$,
c) $x^8 + x^5 + x^3 + 1 > x^7 + x$.

Soluţie. a) Rescriem inegalitatea succesiv $x^8 + x^5 - x^4 - x + 1 > 0$, $x^8 + x^4(x-1) - (x-1) > 0$, $x^8 + (x^4-1)(x-1) > 0$, $x^8 + (x^2+1)(x+1)(x-1)^2 > 0$. Dacă $x \geq -1$ membrul stâng este o sumă de două numere nenegative care nu sunt simultan 0, deci este pozitiv. **1p**

Pe de altă parte, inegalitatea din enunţ se poate rescrie echivalent $1+x(x^7+x^4-x^3-1) = 1+x(x^4-1)(x^3+1)$. Dacă $x < -1$ atunci $x^3 < -1$, iar $x^4 > 1$, deci $x^4 - 1 > 0$, $x^3 + 1 < 0$, deci $x(x^4-1)(x^3+1) > 0$, de unde concluzia. **1p**

b) Se poate proceda ca la a) sau se poate observa că punând $x = \frac{1}{y}$ în inegalitatea de la a) se obţine că $y^8 + y^3 + 1 > y^7 + y^4$, $\forall\, y \neq 0$, inegalitatea fiind evidentă şi pentru $y = 0$. **3p**

c) Dacă $x \geq 0$, atunci $x^8+x^5+x^3+1-x^7-x = x^5+x^3+(x-1)(x^7-1) > 0$ pentru că numerele $x-1$ şi x^7-1 au acelaşi semn. **1p**

Dacă $x < 0$, atunci $x^8 + x^5 + x^3 + 1 - x^7 - x = x^8 + 1 - x(x^2-1)(x^4-1) = (x^8+1) - x(x^2-1)^2(x^2+1) > 0$, primul termen fiind pozitiv, în timp ce al doilea este nenegativ. **1p**

Problema 2. Care este cel mai mic număr natural nenul care se scrie atât ca suma a 2015 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor, cât şi ca suma a 2016 numere naturale care au o aceeaşi sumă a cifrelor ? (Suma cifrelor numerelor din prima sumă şi suma cifrelor numerelor din cea de-a doua sumă nu trebuie să fie neapărat egale.)

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. Pentru un număr natural N vom nota cu $s(N)$ suma cifrelor sale. Se ştie că $s(N) \equiv N \pmod 9$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$.

Fie n numărul căutat. Atunci există $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ cu $s(a_1) = s(a_2) = \ldots = s(a_{2015}) = s$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ cu $s(b_1) = s(b_2) = \ldots = s(b_{2016}) = s'$ astfel ca $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2016}$.

Atunci $n \equiv s(b_1) + s(b_2) + \ldots + s(b_{2016}) = 2016s' \equiv 0 \pmod 9$, deci $9 \mid n$.
.... **2p**

Dar $n \equiv s(a_1) + s(a_2) + \ldots + s(a_{2015}) = 2015s \pmod 9$ şi $(2015, 9) = 1$ implică $9 \mid s$. Cum $s \neq 0$, rezultă $s \geq 9$, deci $a_i \geq 9$, de unde $n \geq 2015 \cdot 9 = 18135$. **3p**

Vom arăta că numărul căutat este chiar 18135. Evident el se scrie $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015}$ cu $a_i = 9$, $\forall\, i = \overline{1, 2015}$.

Vom arăta în continuare că el se scrie ca $b_1+b_2+\ldots+b_{2016}$, cu $b_j \in \{1, 10\}$ (deci cu $s(b_j)=1, \forall\, j$).

Alegând $b_1=b_2=\ldots=b_k=10$ şi $b_{k+1}=b_{k+2}=\ldots=b_{2016}=1$, trebuie ca $b_1+b_2+\ldots+b_{2016}=2016+9k=18135$. Rezultă $k=1791$, deci 18135 se scrie ca suma a 2016 numere care au suma cifrelor 1. .... **2p**

Observaţie: Există şi alte alegeri ale numerelor $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$, nu numai cu $s'=1$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi A', B', C' picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Fie t tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC.

a) Arătaţi că t este paralelă cu $B'C'$.

b) Dacă B'' şi C'' sunt proiecţiile lui B, respectiv C, pe t, demonstraţi că $A'B''$ este paralelă cu AC, iar $A'C''$ este paralelă cu AB.

c) Fie $\{X\}=A'B''\cap AB$ şi $\{Y\}=A'C''\cap AC$, X' mijlocul lui $[BB'']$ şi Y' mijlocul lui $[CC'']$. Demonstraţi că dreptele XX' şi YY' sunt paralele.

Soluţie. a) Patrulaterul $BCB'C'$ este înscris în cercul de diametru $[BC]$, deci $m(\angle AC'B')=180°-m(\angle B'C'B)=m(\angle ACB)$. Dar unghiurile $\angle ACB$ şi $B''AB$ subîntind acelaşi arc, AB, deci sunt congruente. Rezultă că $\angle B''AC' \equiv \angle AC'B'$, ceea ce implică paralelismul cerut. **2p**

b) Patrulaterul $AB''BA'$ este înscris în cercul de diametru $[AB]$, deci $\angle B''A'B \equiv \angle B''AB \equiv \angle ACB$, de unde rezultă că $B''A' \parallel AC$.
Analog rezultă că $C''A' \parallel AB$. **2p**

c) Din cele de mai sus rezultă că $AXA'Y$ este paralelogram, deci $\Delta\, AXA' \equiv \Delta\, A'YA$. Pe de altă parte, $\Delta\, BXB'' \sim \Delta\, A'XA$ şi $\Delta\, AYA' \sim \Delta\, CYC''$, de unde $\Delta\, B''XB \sim \Delta\, CYC''$. Rezultă că $\angle B''BX \equiv \angle CC''Y$ şi $\dfrac{XC}{YB''}=\dfrac{B''B}{CC''}=\dfrac{BX'}{C''Y'}$, deci triunghiurile XBX' şi $YC''Y'$ sunt asemenea. Obţinem că $\angle BX'X \equiv \angle C''Y'Y$ şi, cum $BB'' \parallel CC''$, rezultă concluzia. **3p**