Lecție pentru clasa a IV-a,
Ioana-Valeria Gavrilă, clasa a VI-a

Principiul Cutiei(Dirichlet)

Lectie pentru clasa a cincea

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet a fost matematician german, celebru prin contribuțiile valoroase în analiza matematică și teoria numerelor. Da, probabil ca va plictisesc cu aceasta caracterizare…Ceea ce e de retinut este ca pe parcursul vietii a gasit o solutie foarte simpla de a rezolva un anumit tip de probleme.

Probabil ca ati mai auzit de ele sau de ce nu ,ati fost pusi in ipostaza de a le rezolva.Astazi am de gand sa va prezint acest principiu care ne poate ajuta chiar si in viata de zi cu zi.

Prima oara eu m-am lovit de acest tip de probleme in culegerea de cls a cincea. Dupa ce m-am chinuit sa gasesc o solutie, mi-am dat seama ca nu stiu sa rezolv o astfel de problema. Cand am ajuns a doua zi la scoala , am intrebat-o pe doamna invatatoare si a inceput sa imi explice despre acest mod de rezolvare numit PRINCIPIUL CUTIEI sau PRINCIPIUL LUI DIRICHLET.

Ce spune acest principu? Ei bine, spune ca daca avem n obiecte dispuse în n – 1 cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține două obiecte. Mai bine zis, daca avem 100 de bomboane dispuse in 99 de cutii, bineinteles ca intr.o cutie vor fi 2 bomboane.

Dar, totusi, daca credeati ca este atat de simplu, o sa vedeti cat de simplu de inteles este generalizarea principiului.

Astfel, generalizarea spune asa:Daca plasăm *pn*+1 obiecte în *n* cutii, atunci cel putin o cutie va contine cel puțin „p+1” obiecte, Nu este atat de greu, nu??

Vom afla mai multe, incercand sa rezolvam probleme, pentru ca stiu ca nu atiinteles perfect cea ce vreau sa spun:

Problema 1. În 500 de cutii se află mere. Se știe că în fiecare cutie se află cel mult 240 mere. Să se demonstreze că există cel puțin 3 cutii ce conțin același număr de mere.

Soluție. Fie că în primele 240 cutii se află un număr diferit de mere (1,2,…,240) și în următoarele 240 de cutii la fel (adică se examinează cazul extremal). Astfel, au rămas 500 – 2·240 = 20 cutii, în care trebuie plasate mere de la 1 la 240.

Adica , mai pe scurt ,va pot da un exemplu mult mai usor de inteles: Sunteti la Mc Donaldsintr.o excursie cu scoala.Ati comandat 45 de hamburgeri care sunt repartizati in cutii (sau H appyMeal-uri), in numar de 44. Prin absurd vom zice ca in fiecare cutie este un hamburger , deci logic ca intr.o cutie se afla doi hamburgeri.

Problema 2. La un test de matematică, din cei 40 de elevi participanți, 25 de elevi au rezolvat prima problemă, 30 de elevi au rezolvat a doua problemă, 35 de elevi au rezolvat-o pe a treia, iar 33 de elevi au rezolvat problema a patra. Arătați că cel puțin trei elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Soluție: Presupunem că niciun elev nu a rezolvat toate cele patru probleme, deci fiecare a rezolvat cel mult trei. Atunci cei 40 de elevi au rezolvat cel mult 40×3=120 probleme. Dar numărul de probleme rezolvate de elevi a fost de 25+30
+35+33=123 probleme. Deci, având în plus 3 probleme rezolvate, înseamnă că cel puțin trei elevi au rezolvat toate cele 4 probleme

Problema 3: Se consideră 7 numere naturale. Demonstraţi că printre numerele date, cel puţin două dau acelaşi rest la împărţirea cu 6.

Soluţie. La impărţirea cu 6 a unui număr natural se poate obţine unul din resturile:0, 1, 2, 3, 4,sau 5. Considerăm cutia ,,i" formată din numerele care dau restul ,,i" la împărţirea cu 6.Rezultă astfel 6 cutii în care trebuie plasate 7 numere. Va exista cel puţin o cutie care conţine două sau mai multe numere care dau acelaşi rest la împărţirea cu 6.

Problema 4: La un turneu de şah au participat n≥2 şahisti. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, cel puţin doi şahisti au acelaşi număr de victorii.

Soluţie: În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare şahist a jucat maximum n-2 partide şi a putut obtine 0, 1, 2, …..n-2 victorii, deci în total n-1 posibilităţi(cutii). Deoarece la turneu au participat n şahisti, rezultă că cel puţin doi şahisti au acelaşi număr de victorii înaintea ultimei runde

Astfel, cutiile din definitia data se transfosrma , ca prin magie in oameni,obiecte si multe altele.

Problema 5. Să se demonstreze că printre orice șase numere întregi există două numere a căror diferență este divizibilă prin 5.

Soluție. Considerăm 5 cutii etichetate cu numerele 0,1,2,3,4, care reprezintă resturile împarțirii la 5. Repartizăm în aceste cutii șase numere întregi arbitrare, independente de restul împărțirii la 5, adică în aceeași cutie se plasează numerele cu același rest de împărțire la 5. Cum numere („obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform principiului Dirichlet, există o cutie ce conține mai mult decât un obiect. Deci, există (cel puțin) două numere plasate în aceeași cutie. Prin urmare, există două numere cu același rest de împărțire prin 5. Atunci, diferența lor este divizibilă prin 5

Nu stiu daca v-am facut sa intelegeti, dar cred ca v-ati dat singuri seama cat de cate ori suntem nevoiti sa-l folosim . Astfel, v-am aratat un mod simplu de a rezolva unele probleme, dar si ca daca matematica n-ar exista, si acum oamenii ar fi traitintr-o epoca indepartata.

Bibliografie:Definitie,probleme rezolvate , explicate