

PRINCIPIUL CUTIEI

ABSTRACT. În articolul de față este prezentat principiul cutiei și sunt rezolvate câteva probleme cu ajutorul acestui principiu.

Lecția se adresează clasa a IV-a

Data: ianuarie 2010

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Acest principiu este mai mult o observație de bun simț care, de-a lungul timpului s-a dovedit foarte utilă în rezolvarea unor probleme.

Se pare că pentru prima oară a fost utilizat de către matematicianul german Dirichlet. Din acest motiv i se mai spune și principiul lui Dirichlet.

Dar care este acest principiu?

Mai întâi un mic exemplu.

Dacă aveți trei mere pe care trebuie să le puneți în două coșuri, atunci va trebui ca într-un coș să puneți două mere.

Despre aceasta este vorba; dacă am mai multe obiecte de așezat în mai puține cutii, atunci într-o cutie trebuie să așez mai multe obiecte.

Iată însă cum se enunță acest principiu la modul general:

Dacă avem un număr N de cutii și un număr $N + 1$ de obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte.

Să numerotăm cutiile cu

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$$

și obiectele cu

$$O_1, O_2, O_3, \dots, O_N, O_{N+1}.$$

Să presupunem că în cutia C_1 se află obiectul O_1 , în cutia C_2 obiectul O_2 și așa mai departe, în cutia C_N se află obiectul O_N . În acest fel am terminat cutiile, dar ne-a mai rămas un obiect. Ce facem cu el? Îl introducem într-o cutie unde se mai află deja un obiect. Așadar, într-o cutie se vor afla două obiecte.

Prezentăm acum câteva exemple. Începem cu o problemă foarte simplă, dar utilă pentru a înțelege mecanismul după care funcționează principiul cutiei.

Problema 1: Dacă întrebăm la întâmplare 367 de persoane care este ziua lor de naștere vom găsi cel puțin două persoane născute în aceeași zi.

Soluție: În această problemă "cutiile" sunt zilele anului. Înseamnă că avem 365 sau 366 de "cutii". Obiectele sunt cele 367 de persoane. Se observă că avem mai multe obiecte decât cutii, atunci, conform principiului cutiei, vom avea cel puțin o cutie cu două obiecte. Așadar, vor fi cel puțin două persoane născute în aceeași zi.

Problema 2: Din trei numere naturale luate la întâmplare, cel puțin două au aceeași paritate.

Soluție: Numerele naturale pot fi pare sau impare. Acestea sunt cutiile; o cutie pentru numere pare și o cutie pentru numere impare. Obiectele sunt cele trei numere. Așadar avem două cutii și trei obiecte. Conform principiului cutiei, într-o cutie sunt cel puțin două obiecte. În concluzie, cel puțin două numere au aceeași paritate.

Problema 3: La o lucrare de matematică, cei 25 de elevi ai unei clase au luat note de la 5 la 10, inclusiv. Arătați că există cel puțin 5 elevi care au luat aceeași notă.

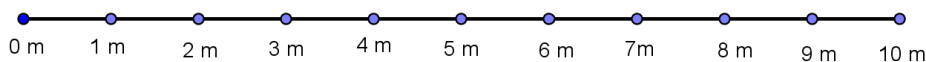
Soluție: Elevii puteau obține notele: 5, 6, 7, 8, 9 sau 10. Acestea vor fi cutiile; în total 6 cutii. Obiectele sunt reprezentate de cei 25 de elevi. Dacă în fiecare cutie vom pune câte 4 obiecte înseamnă că am folosit

$$6 \times 4 = 24 \quad (\text{obiecte})$$

Dar erau 25 de elevi (adică de obiecte), așadar într-o cutie vor fi 5 obiecte (elevi). În concluzie, cel puțin 5 elevi au obținut aceeași notă.

Problema 4: Într-un șir format din 11 persoane, așezate una în spatele celeilalte, distanța dintre prima și ultima persoană este de 10 metri. Arătați că există cel puțin 2 persoane care se află la distanță de 1 metru sau mai puțin de 1 metru una de cealaltă.

Soluție: În figura de mai jos am reprezentat coloana marcând distanța din metru în metru. Pe această linie trebuie să așezăm cele 11 persoane.



În punctele **0 m** și **10 m** trebuie să așezăm câte o persoană (distanța dintre prima și ultima persoană este de 10 metri). Au rămas de așezat 9 persoane.

Dacă o persoană ar fi așezată în segmentul dintre **0 m** și **1 m** sau în segmentul dintre **9 m** și **10 m**, atunci problema ar fi rezolvată; am avea două persoane situate la mai puțin de 1 metru una de cealaltă.

Să presupunem că toate cele 9 persoane rămase sunt așezate în segmentul dintre **1 m** și **9 m**.

"Cutiile" vor fi toate segmentele cu lungimea de 1 metru. Vom avea astfel 8 "cutii" în care trebuie să așezăm 9 "obiecte" (persoanele rămase).

Cum numărul "obiectelor" este mai mare decât numărul "cutiilor", conform principiului cutiei, în cel puțin o "cutie" vor fi două "obiecte".

Asta înseamnă că vom avea cel puțin două persoane la distanță de 1 metru (dacă sunt așezate în punctele care marchează distanța din metru în metru) sau mai puțin de 1 metru (dacă nu sunt așezate în punctele care marchează distanța din metru în metru).

Problema 5: Într-o carieră de piatră sunt 50 de blocuri de piatră. Cel mai ușoar cântărește 370 kg, următorul cânărește 372 kg și așa mai departe, fiecare cântărește cu 2 kg mai mult decât cel dinaintea lui. Aceste blocuri de piatră sunt transportate cu 7 camioane care pot încărca fiecare câte 3000 kg.

Putem transporta toate cele 50 de blocurile de piatră într-un singur transport?

Soluție: Dacă aflăm cât cântăresc toate cele 50 de blocuri de piatră (20950 kg) și împărțim la 7 (numărul camioanelor) obținem mai puțin de 3000 (cât poate căra un camion). Deci răspunsul ar trebui să fie DA.

Dar, blocurile de piatră nu pot fi sparte (tot timpul se vorbește în problemă de 50 de blocuri de piatră).

Atunci cum repartizăm cele 50 de blocuri de piatră în 7 camioane?

Ne spune principiul cutiei. Camioanele sunt "cutiile", iar blocurile de piatră sunt "obiectele". Punând în fiecare "cutie" câte 7 "obiecte" am așezat 49 de obiecte ($7 \times 7 = 49$). A mai rămas un "obiect" (erau 50 de blocuri de piatră).

Înseamnă că într-un camion sunt 8 blocuri de piatră.

Presupunând că alegem cele mai ușoare 8 blocuri de piatră ele vor cântări:

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016 \text{ (kg)}$$

Dar, într-un camion putem pune cel mult 3000 kg.

În concluzie, nu putem transporta toate cele 50 de blocuri de piatră într-un singur transport.