Problema 3. Se consideră numerele $z \in \mathbb{C}$ şi $a = \dfrac{|z+1| - |z-1|}{|z+1| + |z-1|}$. Demonstraţi că $|\text{Im } z| \leqslant |z-a| \leqslant |z|$.

Ludovic Longaver

Soluţie. I. Dacă $z \in \mathbb{R}$, inegalităţile sunt evidente:
Dacă $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, obţinem $0 \leqslant \left|z - \dfrac{1}{z}\right| \leqslant |z|$, deci $0 \leqslant |z^2 - 1| \leqslant z^2$, adevărat.
Dacă $z \in (-1, 1)$, obţinem $0 \leqslant 0 \leqslant |z|$, adevărat.
II. Dacă $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, fie punctele $A(a)$, $B(-1)$, $C(1)$ şi $M(z)$ în planul complex. Deoarece $a = \dfrac{MB - MC}{MB + MC} \in (-1, 1)$, rezultă că $A \in (BC)$.

Fie $D(d)$ piciorul bisectoarei din M a triunghiului BMC.

Din teorema bisectoarei, avem $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{MB}{MC}$. Cum $D \in (BC)$, obţinem că $d = \dfrac{(d+1) - (1-d)}{(d+1) + (1-d)} = \dfrac{DB - DC}{DB + DC} = \dfrac{MB - MC}{MB + MC} = a$, aşadar $(MA$ este bisectoarea unghiului BMC.

Fie $E(\text{Im } z)$. Punctul E este piciorul înălţimii din M a triunghiului BMC, iar $ME = |\text{Im } z|$. Avem $MD = |z - a|$, iar mediana MO are lungimea $MO = |z|$. Deoarece în orice triunghi, lungimea unei înălţimi este mai mică sau egală decât lungimea bisectoarei care pleacă din acelaşi vârf, iar aceasta din urmă este mai mică sau egală decât lungimea medianei care pleacă din vârful respectiv, rezultă concluzia.