Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a X-a

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\big(2f(x)+y\big) - f\big(2f(y)-x\big) = x, \text{ pentru orice } x,y \in \mathbb{R}.$$

GMB nr.4/2022

Soluţie: Punem $y = -2f(x)$ în relaţia din enunţ şi obţinem

$$f(0) - f\big(2f(-2f(x)) - x\big) = x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dacă notăm $g(x) = 2f(-2f(x)) - x$ şi $h(x) = f(0) - x$, relaţia (1) devine $f \circ g = h$. Cum funcţia h este surjectivă, rezultă că $f \circ g$ este surjectivă, iar de aici deducem că f este funcţie surjectivă.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Înlocuind $x = x_0$ în relaţia din enunţ, obţinem $f(y) - f\big(2f(y) - x_0\big) = x_0$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, egalitate ce poate fi scrisă sub forma

$$f\big(2f(y) - x_0\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(2f(y) - x_0\big) - \frac{1}{2}x_0, \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Deoarece funcţia f este surjectivă, la fel este şi funcţia $2f(y) - x_0$, deci pentru orice $z \in \mathbb{R}$ există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $2f(y) - x_0 = z$. Din relaţia (2) obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x_0, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Verificăm dacă funcţiile din (3) satisfac relaţia din enunţ. Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ avem:

$$\begin{aligned} f(2f(x)+y) - f(2f(y)-x) &= f(x - x_0 + y) - f(y - x_0 - x) = \\ &= \frac{1}{2}(x - x_0 + y) - \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}(y - x_0 - x) + \frac{1}{2}x_0 = x. \end{aligned}$$

În concluzie, funcţiile căutate sunt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Barem:

Obţine relaţia (1) **2p**

Obţine relaţia (2) **2p**

Obţine relaţia (3) **2p**

Verificare **1p**