Metode de factorizare a polinoamelor multivariate

ABSTRACT. Materialul contine o serie de metode pentru factorizarea polinoamelor multivariate.

Lectia se adreseaza clasei a VIII-a

Autor: Caba Tudor-Ioan, Liceul Teoretic "Dante Alighieri" , Bucuresti

Nota. Autorul considera ca cititorii sunt familiarizati cu metode elementare de factorizare, precum factorul comun si gruparea termenilor, dar si cu formula solutiilor ecuatiei de gradul 2.

Definitie. Numim *polinom multivariat* un polinom in 2 sau mai multe variabile; In acest articol, vom folosi notatia $P(A_1, A_2...A_n)$ pentru orice polinom multivariat in variabilele $A_1, A_2...A_n$.
Exemplu: $P(X, Y, Z) = X^2Y + 2YZ + 4XY^2Z - 11XYZ^3 - 7$.

Dupa cum bine stiti, un polinom univariat $P_n(X)$ de grad n admite factorizarea

$$P_n(X) = (X - r_1)(X - r_2)...(X - r_{n-1})(X - r_n),$$

unde $r_1, r_2...r_n$ sunt *radacinile* lui $P_n(X)$.

Factorizarea polinoamelor multivariate nu este foarte diferita de cea a polinoamelor univariate. Spre exemplu, sa consideram binecunoscuta identitate

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Desigur, aceasta se poate demonstra usor prin gruparea termenilor. Insa, putem considera $a^2 + 2ab + b^2 = 0$ o ecuatie de gradul 2 in necunoscuta a. Atunci solutiile sunt

$$a_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4b^2}}{2} = -b$$

si cum $\Delta = 0$, factorizarea este $(a - (-b))^2 = (a + b)^2$.

In general, daca pentru un polinom multivariat $P(A_1, A_2, ..., A_n)$ exista o functie $f(A_2, A_3, ...A_n)$ astfel incat

$$P\big(f(A_2, A_3, ...A_n), A_2, ...A_n\big) = 0,$$

atunci $\big(A_1 - f(A_2, A_3, ...A_n)\big)$ este un factor al lui P.

Aproape toate polinoamele in doua variabile se pot factoriza usor prin regruparea termenilor. De aceea, ne vom concentra pe cele in 3 variabile(care sunt cel mai des intalnite in concursuri.) Desigur, toate aceste metode pot fi adaptate usor pentru polinoame in 4 sau mai multe variabile.

Definitie 1. Numim polinom omogen orice polinom multivariat in care gradele monoamelor constituente sunt egale.(Reamintim: gradul unui monom este suma exponentilor variabilelor prezente in acel monom.)

Exemple: $P(X,Y,Z) = X^2Y + Y^2Z + Z^2X$ este un polinom multivariat omogen de grad 3;
$P(A,B) = A^2 + B^2 + A + B$ NU este un polinom omogen, deoarece primele doua monoame au gradul 2, iar urmatoarele 2 au gradul 1.

O proprietate importanta(si folosita des in inegalitati) este aceea ca, daca P este un polinom multivariat omogen de grad r, avem relatia

$$P(kA_1, kA_2, ...kA_n) = k^r P(A_1, A_2...A_n).$$

Definitie 2. Numim polinom ciclic orice polinom multivariat cu proprietatea ca, pentru orice permutare **ciclica** a variabilelor, valoarea polinomului ramane neschimbata:

$$P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_{k+1}, ..., A_n, A_1, ..., A_k), \forall k \text{ a.i. } 1 \leq k \leq n.$$

Exemplu: $P(X,Y,Z) = X^2Y + Y^2Z + Z^2X = Z^2X + X^2Y + Y^2Z = P(Z,X,Y)$.

Definitie 3. Numim polinom simetric orice polinom multivariat cu proprietatea ca, pentru orice permutare a variabilelor, valoarea polinomului ramane aceeasi.

Exemplu: $P(X,Y,Z) = X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$.

Remarca: Orice polinom simetric este si ciclic. Reciproca nu este adevarata: polinomul dat drept exemplu la Polinoame Ciclice nu este simetric(incercati sa evaluati $P(Y,X,Z)$.)

Urmatoarea teorema este de mare importanta:

Teorema. Rezultatul inmultirii, impartirii, adunarii sau scaderii a doua polinoame ciclice(sau simetrice) omogene este tot un polinom ciclic(sau simetric) omogen.

In consecinta, un polinom omogen ciclic(sau simetric) se va factoriza intr-un produs de polinoame omogene ciclice(sau simetrice),cu suma gradelor egala cu gradul polinomului initial.

Sa analizam urmatorul tabel:

Grad	Ciclic	Simetric
1	$a+b+c$	$a+b+c$
2	$a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+ca$	$a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+ca$
3	$a^3+b^3+c^3$, $a^2b+b^2c+c^2a$, $ab^2+bc^2+ca^2$, abc	$a^3+b^3+c^3$, $a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$, abc

Acesta contine toate polinoamele omogene ciclice si simetrice elementare pana la gradul 3, din care, prin insumare si prin adaugare de coeficienti, se pot obtine toate celelalte polinoame ciclice si simetrice omogene(remarcati diferenta dintre polinoamele ciclice si simetrice in tabel!). Spre exemplu, polinomul omogen ciclic de grad 3

$$P(a,b,c) = a^2b - a^3 + b^2c - b^3 + c^2a - c^3 - 3abc$$

reprezinta de fapt doar o suma a polinoamelor ciclice elementare de grad 3 $a^3+b^3+c^3, a^2b+b^2c+c^2a$ si abc, cu coeficientii 1,-1 si -3, respectiv.

Exercitiu 1.Sa incercam sa factorizam polinomul

$$P(a,b,c) = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b).$$

Pentru inceput, observam ca P este omogen si ciclic de grad 4 (dar nu simetric!). Apoi, remarcam ca

$$P(b,b,c) = b^3(b-c) + b^3(c-b) + 0 = b^3(b-c) - b^3(b-c) = 0,$$

de unde rezulta, conform introudcerii, ca $(a-b)|P$. Acum, "trucul" consta in faptul ca P este ciclic; folosindu-ne de Teorema, obtinem ca $(a-b)(b-c)(c-a)|P$. Cum $(a-b)(b-c)(c-a)$ are gradul 3, mai avem nevoie de un polinom simetric de gradul 1. Singura optiune este $(a+b+c)$, si deci

$$P(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a) \cdot k \cdot (a+b+c),$$

unde k este coeficientul lui $(a+b+c)$. Pentru a-l determina, sa evaluam P si factorizarea pe un triplet arbitrar, sa zicem $(a,b,c) = (0,1,2)$:

$$\begin{aligned}
&P(0,1,2) = 0^3(1-0) + 1^3(2-0) + 2^3(0-1) = -6\\
&(0-1)(1-2)(2-0) \cdot k \cdot (0+1+2) = 6k\\
&\Rightarrow 6k = -6 \Rightarrow k = -1.
\end{aligned}$$

In concluzie,

$$P(a,b,c) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = (b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c).$$

Pentru usurinta, putem intocmi un tabel al posibilor factori si al testelor lor, conform introducerii:

Factor	Test
$(x+y)(y+z)(z+x)$	$P(-y,y,z) = 0$
$(x-y)(y-z)(z-x)$	$P(y,y,z) = 0$
xyz	$P(0,y,z) = 0$
$x+y+z$	$P(-y-z,y,z) = 0$
$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$	$P(z-y,y,z) = 0$

Remarcati utilizarea ciclitatii lui P pentru a determina ceilalti factori in functie de unul sigur. Acesti factori sunt totusi valabili doar pentru polinoamele ciclice; In cazul polinoamelor simetrice, aceleasi teste mai adauga o serie de factori. Luati drept exercitiu determinarea acestora.

Exercitiu 2. Factorizati $P(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Observam ca P este simetric si omogen de grad 3. Mai observam ca $P(-b-c,b,c) = 0$ si deci $(a+b+c)|P$. Cum gradul lui $(a+b+c)$ este 1, mai trebuie sa determinam un polinom simetric omogen de grad 2.

Vedem ca si $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, si $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ introduc o serie de monoame de forma x^2y,ce nu apar in factorizarea finala, si deci trebuie cumva anulati. Analizand si coeficientii lui P, deducem ca

$$P = (a+b+c) \cdot k \cdot (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Cum $P(0,1,2) = 6$ si $(0+1+2)k(0+1+5-2) = 6k$, rezulta ca $k=1$, si deci

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(Tineti minte aceasta factorizare; au existat probleme de concurs ce se bazau pe faptul ca $a+b+c=0$ pentru a oferi o relatie intre suma cuburilor si produsul numerelor a,b si c.)

Exercitiul 3. Factorizati $P(x,y,z) = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz$ si $P'(x,y,z) = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz$. (Aparute in problema 2,clasa a VIII-a din Proba Finala a ViitoriOlimpici.ro 2015)

a) Polinomul este ciclic omogen de grad 3. Observam ca $P(-y-z, y, z) = 0$ si deci $(x+y+z)|P$. Trebuie sa gasim un polinom ciclic simetric de grad 2. Observam ca $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$ introduce puterile a 3-a ale varibilelor, care nu apar in P. Deducem ca

$$P = (a+b+c) \cdot k \cdot (ab+bc+ca)$$

si k se dovedeste a fi 1.

b) Aceasta este o factorizare de-a dreptul banala. P' este ciclic si omogen de grad 3. Observam ca $P'(-y, y, z) = 0$ si deci $(x+y)(y+z)(z+x)|P'$. Dar am atins deja gradul 3. Prin urmare,

$$P' = k \cdot (x+y)(y+z)(z+x)$$

iar k se dovedeste a fi 1.

Sugestii de generalizare. Conform introducerii, aceste metode pot fi generalizate pentru orice numar de variabile. Polinoamele elementare ciclice si simetrice de grad n pentru m variabile apar in forma expansionata a polinomului $(A_1 + A_2 + ... + A_m)^n$. Totusi, computatia acestuia nu este necesara, intrucat polinoamele pot fi deduse intuitiv.

Alte probleme. Factorizarea polinoamelor este de obicei doar o subrutina in rezolvarea problemelor, iar exercitii de factorizare pot fi usor generate de cititor. De aceea, va prezint urmatoarele doua probleme, mai interesante:

1.Gasiti o factorizare generala pentru $a^k(b-c) + b^k(c-a) + c^k(a-b)$, cand k este impar.

2. a) Aratati ca $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ (identitatea Sophie Germain)

b) Aratati ca $4^{545} + 5^{454}$ este un numar compus.

c) Aratati ca exista un numar infinit de numere naturale a cu proprietatea ca $n^4 + a$ este numar compus pentru orice numar natural n.(OIM 1969, Problema 1).

Bibliografie

Art of Problem Solving, https://www.artofproblemsolving.com/
Wolfram Mathworld, http://mathworld.wolfram.com/
Queen's College Hong Kong
University of Pennsylvania