Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018
Clasa a V-a

Problema 1. Suma a şapte numere naturale este 2017, iar suma a trei dintre ele este 1008. Arătaţi că produsul lor este un număr divizibil cu 4.

Soluţie: Produsul celor şapte numere se divide cu 4 dacă cel puţin două dintre numere sunt pare. **1p**

Dacă suma a trei dintre numere este 1008, atunci unul dintre ele este număr par sau toate trei sunt numere pare.

Dacă trei dintre ele sunt numere pare, atunci produsul celor şapte numere se divide cu 8, deci şi cu 4. .... **3p**

Dacă unul singur este par, deoarece suma celor şapte numere este 2017, un număr impar, rezultă că suma celorlalte şase este un număr impar. De aici concluzia că printre cele şase numere mai există cel puţin un număr par. În aceste condiţii, având două numere pare, produsul lor se divide cu 4. .... **3p**

Problema 2. Determinaţi numerele prime p şi q pentru care $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{10} + q = 2050$.

Soluţie: Dacă $p \geq 3$, atunci $p^{10} \geq 3^{10}$ şi cum $3^{10} = 59049$ deducem că egalitatea $1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{10}+q = 2050$ este imposibilă. Prin urmare $p = 2$. **4p**

Relaţia dată devine $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} + q = 2050$. Cum $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2048$, obţinem $q = 3$. **3p**

Problema 3. Fie numerele naturale $x_1, x_2, x_3, ..., x_{100}$, care împărţite la un număr natural nenul n, dau resturi diferite două câte două şi câturi nenule, diferite două câte două.

a) Arătaţi că $n \geq 100$.

b) Calculaţi cea mai mică valoare a sumei $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{100}$.

Soluţie: a) Presupunem că $n < 100$ atunci, dacă r este restul împărţirii la n, avem $r \leq 98$. Înseamnă că avem 99 de resturi diferite. Deoarece împărţim 100 de numere la n trebuie să avem 100 de resturi. Atunci unele dintre resturi vor fi egale, ceea ce contrazice ipoteza problemei. În concluzie $n \geq 100$. **3p**

b) Notâm x_k unul dintre numerele date, unde k este un număr natural de la 1 la 100. Avem $x_k = n \cdot c_k + r_k$, c_k fiind câtul şi r_k restul împărţirii la n a numărului x_k. Atunci $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{100} = n \cdot c_1 + r_1 + n \cdot c_2 + r_2 + n \cdot c_3 + r_3 + ... + n \cdot c_{100} + r_{100} = n \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_{100}) + (r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_{100})$. **2p**

Cea mai mică valoare a sumei $c_1+c_2+c_3+...+c_{100}$ este $1+2+3+...+100 = 101\cdot 50$, iar cea mai mică valoare a sumei $r_1+r_2+r_3+...+r_{100}$ este $0 + 1 + 2 + ... + 99 = 99 \cdot 50$.

Dacă luăm $n = 100$ obţinem $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{100} = 509950$, cea mai mică valoare a sumei căutate. **2p**