Clasa a XI-a

Problema 1. Fie A, B matrice de ordin 3, cu elemente numere reale, astfel încât, pentru orice număr complex x de modul 1,

$$|\det(A + xB)| \leqslant 1.$$

Arătaţi că $|\det A| \leqslant 1$.

Problema 2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha > 1.$$

Arătaţi că şirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ dat de

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{a_n}$$

are o limită ℓ. Care este valoarea minimă a lui ℓ ?

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie continuă şi $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir dat de $a_1 \in [0, 1]$, $a_{n+1} = f(a_n)$ pentru $n \geqslant 1$.

a) Arătaţi că, dacă $(a_{n+1} - a_n) \to 0$ şi $\alpha < \beta$ sunt două puncte limită ale şirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$, atunci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$.

b) Deduceţi că şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.