Lecție pentru clasa a V-a,
Bianca-Elena Dabija, clasa a V-a

Utilizarea metodei reducerii la absurd în rezolvarea problemelor de algebră

Matematica este una dintre cele mai vechi științe fiind legată la început de conceptele de număr, mărime și formă.

În Grecia antică, matematică a constat într-o rafinare a metodelor (în special prin introducerea de raționamente deductive și de rigoare matematică în demonstrații) și a extins subiectul de studiu al matematicii.

Metoda reducerii la absurd, se bazează pe o lege fundamentală în logica matematică, numită legea terțului exclus, care are enunțul următor: „Din două propoziții contradictorii, una este adevărată, cealaltă este falsă, iar a treia posibilitate nu există".

De observat că această lege a terțului exclus nu precizează care propoziție este adevărată și care falsă! Dar o putem folosi pentru a o găsi pe cea adevărată(sau falsă) prin aplicarea acestei legi la două propoziții contradictorii. Aceasta este calea de demonstrație pentru metoda reducerii la absurd.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, drept adevărată propoziția contradictorie propoziției de demonstrat, urmând ca pe baza acestei presupuneri să deducem o serie de consecințe care duc la un rezultat contrar unui adevăr cunoscut, sau absurd, prin contrazicerea ipotezei problemei date. Înseamnă că premisa de la care am pornit este falsă. Deci propoziția de demonstrat este adevărată.

Metoda reducerii la absurd nu se reduce la propoziția "a se demonstra opropoziție este același lucru cu a demonstra contrara reciprocei ei", deoarece pot apărea și situații în care nu se contrazice ipoteza ci o altă propoziție (un rezultat cunoscut, oaxiomă, o teoremă). Metoda reducerii la absurd se folosește atât în rezolvareaproblemelor de calcul („de aflat") cât și la rezolvarea problemelor de "demonstrat". Ea este utilizatădes în demonstrarea teoremelor reciproce, precum și îndemonstrarea teoremelor de unicitate.

Câteva tipuri de probleme ce se pot rezolva prin această metodă:

1. Suma a 10 numere naturale nenule este 54. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere egale.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există 10 numere naturale, nenuledistincte a cărei sumă este 54. Pornind de la $1 + 2 + 3 + .. + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ contradicție cu enunțul $55 \neq 54$, rezultă că presupunerea este falsă și afirmația din enunț este adevărată.

2. Suma a trei numere naturale este 136. Demonstrație că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 46.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există trei numere naturale, mai mici decât 46, a cărei sumă să fie 136. Dar aceasta înseamnă că fiecare număr este maxim 45 și avem $45 + 45 + 45 = 135$. Contradicție cu enunțul problemei, deducem astfel că presupunerea este falsă și deci afirmația din enunț este adevărată.

3. În zece cutii se află 84 de bile: roșii, galbene, albastre și verzi. Știind că în fiecare cutie se află bile de toate culorile.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că în cele zece cutii se află un număr distinct de bile. Cum in fiecare cutie se află bile de toate culorile, rezultă că numărul minim de bile din fiecare cutie este 4. Atunci numărul total de bile din cele zece cutii este: $4+5+6+..+13=1+2+..+13-1-2-3=\frac{13\cdot 14}{2}-6=91-6=85$, absurd, contrazicem ipoteza, rezultă că presupunerea făcută este falsă și afirmația din enunț este adevărată. Există cel puțin două cutii în care numărul de bile este egal.

4. Într-o cutie se află bile albe și roșii. Știind că oricum am extrage cinci bile, între ele se vor afla bile de ambele culori, demonstrați că numărul bilelor din cutie nu depășește 8.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că numărul de bile din cutie depășește 8, deci în cutie ar putea fi cel puțin 9 bile. Dacă am lua în considerare doar cel mai mic număr de bile din cutie, adică 9, vom avea următoarele situații:

- 1 bilă albă și 8 bile roșii sau invers,
- 2 bile albe și 7 bile roșii sau invers,
- 3 bile albe și 6 bile roșii sau invers,
- 4 bile albe și 5 bile roșii sau invers.

Nu putem avea doar bile de o singură culoare, pentru că la o extragere nu vom avea bile de ambele culori.

În oricare din situațiile menționate ar exista posibilitatea ca după 5 extrageri să avem totuși bile de aceeași culoare, ceea ce contrazice enunțul. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și concluzia problemei este adevărată. Deci pentru a îndeplini condițiile din problemă, ca la o extragere de cinci bile să avem bile de ambele culori, trebuie să avem cel mult patru bile de aceeași culoare, deci să avem cel mult 8 bile în total.

5. Demonstrați că nu există nici un număr natural n astfel încât numerele $n, n+2, n+6, n+14, n+18, n+20$ să fie simultan numere prime.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există n, un număr natural, prim, astfel încât numerele $n, n+2, n+6, n+14, n+18, n+20$ să fie simultan numere prime.

Dacă $n=2 => n+2=4$ care nu este prim.

Dacă $n=3 => n+6=9$ care nu este prim.

Dacă $n=5 => n+20=25$ care nu este prim.

Dacă$n>5$ și n prim, avem că$n \in \{5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4\}$. Studiem fiecare caz și avem:

Dacă $n=5k+1 => 5k+1+14=5(k+3)$ care nu este prim.

Dacă $n=5k+2 => 5k+2+18=5(k+4)$ care nu este prim.

Dacă $n=5k+3 => 5k+3+2=5(k+1)$ care nu este prim.

Și în final, dacă $n=5k+4 => 5k+4+6=5(k+2)$ care nu este prim. Rezultă că presupunerea este falsă și concluzia problemei adevărată.

6. *Să se arate că pentru orice număr natural diferit de zero fracția* $\frac{2n-1}{2n+1}$ *este ireductibilă.*

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că fracția nu este ireductibilă, atunci există un număr natural $d \neq 1$, astfel încât $d|(2n-1)$ și $d|(2n+1)$, de unde avem că $d|[(2n+1)-(2n-1)] => d|2$. Cum $d \neq 1 => d|2 => d|(2n-1)$ ceea ce este absurd. Rezultă că presupunerea este falsă și concluzia problemei adevărată.

7. *Să se determine numărul de elemente ale mulțimii:* $M = \left\{\frac{n+1}{2n+1}, n = 1,2,3, \dots ,2003\right\}$.

Demonstrație: Mulțimea are atâtea elemente câte valori distincte are fracția $\frac{n+1}{2n+1}, n = 1,2,3, \dots ,2003$. Astfel presupunem prin reducere la absurd că există $n_1, n_2, n_1 \neq n_2$ pentru care fracția are aceeași valoare, ceea ce înseamnă că:

$$\frac{n_1+1}{2n_1+1} = \frac{n_2+1}{2n_2+1} \leq> (n_1+1)(2n_2+1) = (n_2+1)(2n_1+1) <=>$$

$$\leq> 2n_1n_2 + n_1 + 2n_2 + 1 = 2n_1n_2 + n_2 + 2n_1 + 1 \leq> n_1 + n_2 = n_1 + n_2 <=>$$

$<=> n_1 = n_2$, ceea ce contrazice presupunerea dată, rezultă că presupunerea este falsă și concluzia problemei adevărată.

8. *Fie numărul natural* $n = \overline{abcde7}$ *scris în baza zece. Demonstrați că dacă* n *este divizibil cu produsul cifrelor sale, atunci cel puțin două dintre cifrele* a, b, c, d, e *sunt egale.*

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că cifrele a, b, c, d, e sunt distincte două câte două. Numărul $n$este impar (ultima cifră a sa este 7) și se divide cu produsul cifrelor sale, deducem de aici căcifrele sale sunt impare (altfel un număr impar se divide cu un număr par, ceea ce este

imposibil). Așadar $a, b, c, d, e \epsilon \{1,3,5,7,9\}$.Numerele sunt diferite două câte două și deci avem că: $\{a, b, c, d, e\} = \{1,3,5,7,9\} => a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$, deci un numărdivizibil cu 5, atunci și numărul n este divizibil cu 5, ceea ce este fals pentru că ultima sa cifrăeste 7. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și concluzia problemei este adevărată.

9. *Arătați a numerele 1,2,…,16 nu pot fi scrise câte o singură dată pe un cerc, astfel încât suma oricăror două numere alăturate să fie un pătrat perfect.*

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că scrierea ar fi posibilă. Notăm cu a și b două numere vecine lui 16. Avem: $a \in \{1,2,..,15\} => a + 16 \in \{17,18,19,..,31\}$. Din presupunerea făcută $a + 16$ este pătrat perfect și deci este $a + 16 = 25$, singurul număr pătrat perfect din mulțimea $\{17,18,19,..,31\}$, deci avem că $a = 25 - 16 = 9$. În mod analog tratăm cazul lui b și vom găsi același număr $a + 16 = 25 => b = 9$. Dar numerele erau scrise o singură dată și deci contrazicem ipoteza. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și concluzia problemei adevărată.

10. *Într-un aprozar sunt 17 lăzi de mere de două calități. Să se arate că există cel puțin 9 lăzi de mere de aceeași calitate.*

Demonstrație: Presupunem prin absurd că nu există 9 lăzi de mere de o calitate. Deci vor fi cel mult 8 lăzi de mere de fiecare calitate, adică în aprozar vor fi cel mult $8 \cdot 2 = 16$ lăzi de mere.

Contradicție cu enunțul problemei. Deci presupunerea făcută este falsă, adică există cel puțin 9 lăzi de mere de o calitate.

Obs. Acest tip de probleme se încadrează într-o categorie de probleme care se rezolvă cu ajutorul principiului lui Dirichlet, adică: „Dacă $n+k+1$ piese sunt dispuse în k lăzi, atunci cel puțin într-una din lăzi se află cel puțin $n+1$piese.” Demonstrația ei se face folosind metoda reducerii la absurd: presupunem prin absurd că nu există nici o ladă în care se află $n+1$ piese. Atunci în fiecare ladă se află cel mult n piese. Însumând avem în total că sunt $n+k$ piese în cele k lăzi, contradicție cu enunțul problemei. Rezultă că există o ladă în care avem cel puțin $n+1$ piese.

Elev: Dabija Bianca-Elena,

Profesor îndrumător: Lazăr Lucian,

Colegiul Național „Gheorghe Vrănceanu”, Bacău