RADICALI

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva dintre proprietăţile radicalilor utile în rezolvarea multora dintre problemele caracteristice acestei noţiuni (rădăcina de ordin 2 a numerelor reale nenegative).

Lecţia se adresează claselor a VII-a şi a VIII-a.

Data: Decembrie 2009

Autori: Vasilica Dilimoţ - Niţă, Profesor, Şcoala nr. 36, Bucureşti
Vasile Dilimoţ - Niţă, Profesor, C.N. "Gheorghe Şincai", Bucureşti

Vom începe cu definiţia radicalului de ordin doi.

Definiţie: Pentru orice număr nenegativ (pozitiv sau egal cu zero) a, prin $\sqrt{a}$ înţelegem numărul nenegativ x cu proprietatea $x^2 = a$.

În baza definiţiei de mai sus devine evidentă următoarea propoziţie:

Propoziţia 1: Pentru orice $a \geq 0$ avem
i) $\sqrt{a} \geq 0$
ii) $(\sqrt{a})^2 = a$

O consecinţă imediată a propoziţiei 1 este

Propoziţia 2: Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_k \geq 0$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ are loc echivalenţa:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

(*O sumă de numere nenegative este zero dacă şi numai dacă toate numerele sunt egale cu zero*)

Apicaţia 1: Determinaţi numerele x şi y astfe încât

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+y-10} = 0.$$

Soluţie: Din propoziţia 2 rezultă

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie avem $x = -2$ şi înlocuind în a doua ecuaţie obţinem $y = 12$.

O altă proprietate importantă a radicalilor este dată de

Propoziţia 3: Oricare ar fi numărul real a are loc egalitatea $\sqrt{a^2} = |a|$.

Aplicaţia 2: Rezolvaţi ecuaţia:

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+...+\sqrt{(x-9)^2}+\sqrt{(x-10)^2}=5.$$

Soluţie: În baza propoziţiei 3 putem scrie $|x-1|+|x-2|+...+|x-9|+|x-10|=5$.

Având în vedere proprietăţile modulului şi anume: $|a|=|-a|$ şi $|x|+|y|\geq|x+y|$ vom avea

$$|x-1|+|x-2|+...+|x-9|+|x-10|=$$
$$|x-1|+|2-x|+...+|x-9|+|10-x|\geq|x-1+2-x+...+x-9+10-x|=5$$

Această relaţie conduce la $|x-1|+|2-x|+...+|x-9|+|10-x|=0$. Ultima relaţie nu poate fi adevărată şi în concluzie ecuaţia iniţială nu are soluţie.

Propoziţia 3, punctul i) se generalizează în

Propoziţia 4: Pentru orice număr natural nenul n şi orice număr real $a_k\geq 1, k\in\{1,2,...,n\}$ are loc inegalitatea $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}\geq 0$

Aplicaţia 3: Determinaţi numerele reale x,y,z pentru care $\sqrt{x^2-7x+6}+\sqrt{2y+z-5}+\sqrt{y+2z-4}=36-x^2$

Soluţie: Proprietatea 4 conduce la $36-x^2\geq 0$, de unde $-6\leq x\leq 6$ (1). Pe de altă parte, pentru ca $\sqrt{x^2-7x+6}$ să existe este necesar ca $x^2-7x+6\geq 0$, de unde $x\leq -7$ sau $x\geq 6$ (2). Din (1) şi (2) deducem că $x=6$ şi ecuaţia devine $\sqrt{2y+z-5}+\sqrt{y+2z-4}=0$.

În baza propoziţiei 2 avem $\begin{cases} 2y+z-5=0 \\ y+2z-4=0. \end{cases}$, de unde $y=2$ şi $z=1$.

Propoziţia 5: Dacă $0\leq a\leq b$, atunci $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.

Demonstraţie: Presupunem că $\sqrt{a}>\sqrt{b}$. Atunci $(\sqrt{a})^2>(\sqrt{b})^2$ (se ştie că $x>y>0\Rightarrow x^2>y^2$). De aici $a>b$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza ($a\leq b$), deci presupunerea este falsă.

Aplicaţia 4: Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+...+\sqrt{x+n}=\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$.

Soluţie: Din condiţiile de existenţă a radicalilor avem $x\geq 0$. Se observă că $x=0$ este soluţie a ecuaţiei. Vom arăta că soluţia este unică. Presupunem că există o soluţie $x_1>0$. Este evidentă relaţia $\sqrt{x_1+k}>\sqrt{k}$ pentru orice $k\in\{0,1,2,...,n\}$. De aici $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1+1}+...+\sqrt{x_1+n}>\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$, deci ecuaţia nu se verifică pentru $x>0$. Rămâne ca unică soluţie $x=0$.

Propoziţia 6: i) Pentru $a,b\geq 0$ avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$ cu egalitate pentru $a\cdot b=0$;

ii) (*Generalizare*) Dacă $a_1\geq 0, a_2\geq 0,...,a_n\geq 0$ cu $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, atunci $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}\geq\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}$, cu egalitate dacă cel mult unul dintre numerele $a_1,a_2,...,a_n$ este diferit de 0.

Demonstraţie: i) Prin ridicare la pătrat, membru cu membru obţinem $\sqrt{ab} \geq 0$ care este evident adevărată.

ii) Se demonstrează prin inducţie. Pentru $n = 2$ relaţia este cea de la punctul i). Presupunem adevărată relaţia $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}$ şi demonstrăm că $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}$.

Avem $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}+\sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}$.

Aplicaţia 5: Aflaţi numerele reale x şi y pentru care $\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{3x + 5y + 2} + \sqrt{1 - 4x - 2y} = \sqrt{x + 2y}$.

Soluţie: Să observăm că $(2x-y-3)+(3x+5y+2)+(1-4x-2y) = x+2y$ şi atunci suntem în condiţiile propoziţiei 6 ($\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{3x + 5y + 2} + \sqrt{1 - 4x - 2y} \geq \sqrt{(2x - y - 3) + (3x + 5y + 2) + (1 - 4x - 2y)}$). Atunci cel puţin doi dintre termenii $2x - y - 3, 3x + 5y + 2, 1 - 4x - 2y$ sunt egali cu zero.

Avem cazurile

1. $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 2 = 0. \end{cases}$, de unde $x = 1$ şi $y = -1$.

2. $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 1 - 4x - 2y = 0. \end{cases}$, de unde $x = \frac{7}{8}$ şi $y = -\frac{5}{4}$.

3. $\begin{cases} 3x + 5y + 2 = 0 \\ 1 - 4x - 2y = 0. \end{cases}$, de unde $x = \frac{9}{14}$ şi $y = -\frac{11}{14}$.

Cazul în care toţi cei trei termeni sunt egali cu zero nu este posibil.

Ceea ce urmează vizează calitatea de număr raţional sau iraţional a numerelor exprimate prin radicali.

Definiţie: Un număr natural nenul k se numeşte liber de pătrate dacă şi numai dacă nu există $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât m^2 să dividă k.

Propoziţia 7: Fie k un număr natural nenul, liber de pătrate. Atunci $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstraţie: Presupunem $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$. Atunci $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $(p, q) = 1$. Ridicând la pătrat obţinem $k \cdot q^2 = p^2$ şi deci k divide p. De aici rezultă $p = k \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$. Atunci $k \cdot q^2 = k^2 \cdot m^2$ sau $q^2 = k \cdot m^2$, ceea ce conduce la k divide q. Dar k divide şi p şi deci $k = 1$, ceea ce este fals. Aşadar $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$.

Propoziţia 8: Dacă a şi b sunt numere raţionale, iar k număr natural nenul liber de pătrate şi $a + b\sqrt{k} = 0$, atunci $a = b = 0$.

Demonstraţie: Dacă $b \neq 0$, atunci $\sqrt{k} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este fals. Rezultă $b = 0$ şi de asemenea $a = 0$.

Consecinţă: Dacă a, b, A, B sunt numere raţionale şi k este număr natural nenul liber de pătrate, iar $a + b\sqrt{k} = A + B\sqrt{k}$, atunci $a = A$ şi $b = B$.

Demonstraţie: Relaţia $a + b\sqrt{k} = A + B\sqrt{k}$ se scrie $(a - A) + (b - B)\sqrt{k} = 0$ şi din propoziţia 8 avem $a - A = 0$ şi $b - B = 0$ de unde $a = A$ şi $b = B$.

Aplicaţia 6: Determinaţi numerele raţionale a şi b pentru care

$$\frac{(a + b\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}{3 - 2\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

Soluţie: Putem scrie $(2 + 2\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ sau $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)(a+b\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$. Rezultă $a\sqrt{2}+2b = 3-2\sqrt{2}$, de unde $a = -2$ şi $b = \frac{3}{2}$.

Propoziţia 9: Dacă n este număr natural nenul şi $\sqrt{n}$ este număr raţional, atunci $\sqrt{n}$ este număr natural.

Demonstraţie: Din ipoteză $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $(p, q) = 1$. Rezultă $n = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N}^*$. De aici deducem q^2 divide p^2. Cum $(p, q) = 1$ avem $(p^2, q^2) = 1$ şi deci $q^2 = 1$, adică $q = 1$. În concluzie $\sqrt{n} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 10: Dacă a, b sunt numere naturale astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ este număr raţional, atunci $\sqrt{a}$ şi $\sqrt{b}$ sunt numere naturale.

Demonstraţie: Vom arăta că $\sqrt{a}$ şi $\sqrt{b}$ sunt numere raţionale şi în baza propoziţiei 9 rezultă că ele sunt naturale. Dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} = r$ sau $\sqrt{a} = r - \sqrt{b}$. Ridicând la pătrat membru cu membru obţinem $a = r^2 + b - 2r\sqrt{b}$ sau $\sqrt{b} = \frac{r^2 + b - a}{2r}$. Cum $\frac{r^2 + b - a}{2r}$ este număr raţional rezultă $\sqrt{b}$ este număr raţional. Analog arătăm că $\sqrt{a}$ este număr raţional.

Aplicaţia 7: Determinaţi numerele naturale nenule n, m astfel încât $\sqrt{nm + 1} - \sqrt{n} = \frac{nm - n + 1}{5}$.

Soluţie: Suntem în condiţiile propoziţiei 10 şi atunci $\sqrt{nm + 1} = p$ (1) şi $\sqrt{n} = k$ (2) unde p şi k sunt numere naturale. Din (1) şi (2), prin ridicare la pătrat obţinem $n = k^2$ şi $nm = p^2 - 1$ şi ecuaţia iniţială devine $p - k = \frac{p^2 - k^2}{5}$, de unde $(p - k)(p + k - 5) = 0$.

Dacă $p - k = 0$, adică $p = k$ atunci ecuaţia devine $\frac{nm - n + 1}{5} = 0$ sau $m = 1 - \frac{1}{n}$ cu soluţia $n = 1, m = 0$.

Dacă $p+k-5=0$ sau $k=5-p$ Cum $k>0$ deducem $p<5$. Analizând cazurile $p=0, p=1, p=2, p=3, p=4$ obţinem soluţiile $n=4, m=2$ şi $n=1, m=15$.

Încheiem articolul cu formula radicalilor compuşi, formulă cu o largă aplicabilitate.

Propoziţia 11: Dacă $a, b \geq 0$ şi $a \geq \sqrt{b}$ avem

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

unde $c = \sqrt{a^2 - b}$.

Demonstraţie: Relaţia din enunţ este echivalentă cu $a + \sqrt{b} = a + \sqrt{a^2 - c^2}$, care la rândul ei este echivalentă cu $b = a^2 - c^2$. Ultima relaţie este adevărată pentru că din $c = \sqrt{a^2 - b}$ obţinem $b = a^2 - c^2$.

Aplicaţia 8: Arătaţi că pentru orice număr natural $k \geq 5$ are loc egalitatea

$$\sqrt{k - 1 + 4\sqrt{k + 2\sqrt{k-1}}} = \sqrt{k-1} + 2.$$

Soluţie: Pentru $\sqrt{k + 2\sqrt{k-1}} = \sqrt{k + \sqrt{4k-4}}$ aplicăm propoziţia 11. Avem $a = k, b = 4k - 4$ şi atunci $c = \sqrt{k^2 - 4k + 4} = \sqrt{(k-2)^2} = |k-2| = k - 2$. Cu aceasta putem scrie $\sqrt{k + 2\sqrt{k-1}} = 1 + \sqrt{k-1}$. Atunci $\sqrt{k - 1 + 4\sqrt{k + 2\sqrt{k-1}}} = \sqrt{k + 3 + 4\sqrt{k-1}}$. Aplicând din nou formula radicalilor compuşi obţinem $\sqrt{k + 3 + 4\sqrt{k-1}} = \sqrt{k-1} + 2$. Acum, egalitatea din enunţ devine $\sqrt{k-1} + 2 = \sqrt{k-1} + 2$, care este adevărată pentru orice număr natural $k \geq 5$.