SUME

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva noţiuni, rezultate şi exemple privind calculul unor sume.

Lecţia se adresează clasei a VII-a.

Data: 9 noiembrie 2009

Autori: Prof. Roxana Diaconescu, Colegiul German Gothe

Prof. dr. Radu Gologan, Preşedinte, S.S.M.R.

Cunoaşteţi probabil cu toţii cum micul Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, matematician german de geniu) a calculat suma primelor 100 de numere naturale, a observat că însumând în ordine inversă trebuie să obţină acelaşi rezultat iar pe coloane fiecare sumă este 101:

$$\begin{array}{llllll} S & = 1 & +2 & +3 & +\cdots & +100 \\ S & = 100 & +99 & +98 & \cdots & +1 \\ 2S & = 101 & +101 & +101 & \cdots & +101, \end{array}$$

deci $2S = 100 \cdot 101$ adică $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$. Evident rezultatul se extinde la oricare primele n numere consecutive:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sunt multe situaţii în matematică unde se caută formule cât mai simple pentru calculul sumei unor termeni definiţi printr-o formulă generală, ca în exemplul de mai sus. Un bun exemplu poate fi următorul: considerăm pe un segment de lungime 1, jumătatea sa din stânga, apoi din segmentul rămas jumătatea din stânga, şi aşa mai departe ajungând să însumăm n segmente. Cât este suma lor, adică ni se cere să calculăm

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Există o formulă generală pentru suma de mai sus? Să observăm pentru acesta un fapt simplu: $\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k}$ valabilă pentru orice k număr natural. Se poate deduce algebric, dar cel mai simplu este să observăm că $\frac{1}{2^k}$ este jumătate din $\frac{1}{2^{k-1}}$. Vom avea atunci pe rând pentru valorile lui $k = 1, 2, \ldots n$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$ care înlocuite în sumă dau

$$S = \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}.$$

Se observă uşor că termenii alăturaţi se reduc doi câte doi (unul este cu minus şi următorul cu plus), deci ne rămâne

$$S = 1 - \frac{1}{2^n}$$

şi iată o formulă simplă pentru suma căutată.

De fapt, exemplele de mai sus prezintă esenţa metodelor prin care anumite sume se pot pune într-o formă simplă.

Mai întâi vom introduce o notaţie ce simplifică mult scrierea, folosind un semn ce este în limba greacă litera S mare (de la suma): $\sum$: *sigma* (*Cititorul poate trece la prima lectură peste proprietăţile prezentate formal si citi doar aplicaţiile*).

Vom scrie $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ şi vom citi sumă de la $k = 1$ la n din a indice k, înţelegând prin aceasta suma tuturor termenilor $a_1, a_2, a_3, \ldots$. până la a_n. De exemplu $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Sunt uşor de remarcat următoarele două proprietăţi algebrice ce sunt implicate de această notaţie:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

şi pentru orice număr a

$$\sum_{k=1}^{n} a \cdot a_k = a \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

altfel spus "factorii multiplicativi independenţi de variabila de sumare (k) pot fi scoşi factori comuni în sume".

Exemplu. Cu această notaţie suma lui Gauss poate fi scrisă:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Primul exemplu din această expunere arată în fapt metoda principală de calcul a sumelor (atunci când aceasta este posibil). Iată mai întâi ideea formală: să presupunem că în suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ putem scrie fiecare termen a_k sun forma $a_k = b_k - b_{k+1}$ (aşa cum în primul exemplu am scris $\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k}$; aici $a_k = \frac{1}{2^k}$ iar $b_k = \frac{1}{2^{k-1}}$).

Să observăm că atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k=1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}).$$

Termenii alăturaţi ai ultimei expresii se reduc doi căte doi, rămânând doar $b_1 - b_{n+1}$. Aşadar

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_{n+1}.$$

La fel, dacă reuşim să scriem $a_k = b_{k+1} - b_k$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_n).$$

De exemplu, pentru $a_k = k$, avem $a_k = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$, ceea ce se verifică imedia: aici $b_k = \frac{k(k-1)}{2}$. Avem, în particular,

$$\sum_{k=1}^{3} k = \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2},$$

regăsind astfel formula lui Gauss.

Exemple. 1. Cu această metodă se pot calcula sumele primelor n pătrate sau cuburi de numere naturale. Astfel, se arată că (încercaţi ca exerciţiu sau citiţi pe wikipedia):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4},$$

observând că suma cuburilor este pătratul sumei primelor n numere.

2. Calculaţi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Să observăm că $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Atunci suma se poate scrie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Posibilitatea de a însuma prin metoda de mai sus ne permite uneori, când sumarea nu este posibilă să stabilim inegalităţi. Iată două exemple

3. Arătaţi că $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{1.000.000} < 1$

Nu există nici o posibilitate de a găsi o formulă pentru acesată sumă, în schimb să observăm că mărind "un pic" fiecare fracţie putem obţine o sumă de tipul celei de mai sus. E clar că $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)}$ pentru orice număr natural diferit de 1. Avem

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < 1,$$

observând că evaluarea este independentă de n.

4. Calculaţi partea întreagă a numărului $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}})\right)$.

Să observăm că avem următoarea scriere:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Analog se arată că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Putem scrie atunci, pentru n natural mai mare sau egal cu 2:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n} - 1,$$

şi

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 2$$

Cum pentru $n = 1.000.000$ $\sqrt{n} = 1000$ iar $\sqrt{1001} = 1000,005$ obţinem că $998 < S_n < 999$, deci partea întreagă este 998.