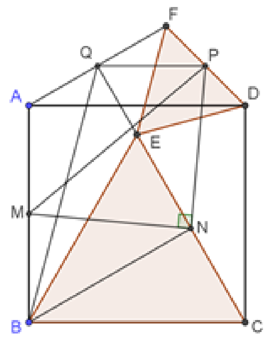
Problema 4
Etapa 1
Clasa a VII-a

Problema 4. Construim pe rând pătratul $ABCD$, în interiorul lui un triunghi echilateral BCE şi triunghiul echilateral EDF astfel încât punctele E şi F sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AD. Notăm cu M, N şi P mijloacele laturilor AB, CE respectiv FD. Arătaţi că triunghiul NMP este dreptunghic isoscel.

Adrian Bud

Soluţie



Notăm cu Q mijlocul lui AF.

Triunghiul CED este isoscel cu $\sphericalangle ACD = 30°$, de unde rezultă $\sphericalangle CED = \sphericalangle CDE = 75°$.

Triunghiul EAD este isoscel cu $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = 15°$, de unde rezultă $\sphericalangle AED = 150°$.

Triunghiul EAF are $EA = ED = EF$ şi $\sphericalangle AEF = 90°$, deci este dreptunghic isoscel cu EQ mediana din vârf adică şi bisectoare, de unde rezultă $\sphericalangle QEF = 45°$. $\sphericalangle QEF + \sphericalangle FED + \sphericalangle DEC = 180°$, implică coliniaritatea punctelor C, E şi Q.

Din congruenţa triunghiurilor BQA şi BQE $(L.L.L.)$ rezultă $\sphericalangle EQB = \sphericalangle AQB = \dfrac{\sphericalangle AQE}{2} = 45°$.

În triunghiul NBQ avem $\sphericalangle BNQ = 90°$, $\sphericalangle BQN = 45°$, astfel că $\sphericalangle NBQ = 45°$, adică triunghiul NBQ este dreptunghic isoscel cu $NB = NQ$.

QP este linie mijlocie în triunghiul FAD şi astfel $QP \parallel AD \parallel BC$, de unde rezultă $\sphericalangle PQC = \sphericalangle QCB = 60°$ iar $QP = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{AB}{2} = MB$.

$$\sphericalangle NBM = \sphericalangle ABC - \sphericalangle NBC = 90° - \frac{\sphericalangle EBC}{2} = 90° - 30° = 60°.$$

$$\begin{array}{c}\Delta NPQ \\ \Delta NMB\end{array} \left\{ \begin{array}{c} [NQ] \equiv [NB] \\ \sphericalangle NQP \equiv \sphericalangle NBM \\ [QP] \equiv [BM] \end{array} \right\} \stackrel{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta NPQ \equiv \Delta NMB,$$ de unde rezultă $NP = NM$ şi $\sphericalangle MNB = \sphericalangle PNQ$.

$\sphericalangle MNP = \sphericalangle MNQ + \sphericalangle QNP = \sphericalangle MNQ + \sphericalangle MNB = \sphericalangle BNQ = 90°$ şi astfel triunghiul NMP este dreptunghic isoscel.